

Exercice 1 (5,5 points)

1) Démontrer les propositions suivantes

a/ $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$

b/ Pour tout entier naturel n , 9 divise $7^{3n} - 1$

c/ Pour tout entier naturel n , $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11

2) a/ Donner suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 3^n par 5.

b/ Déterminer alors le reste modulo 5 de l'entier $A = (2016)^{2015} + (2017)^{2016} + (2018)^{2017}$

3) Quel est le chiffre des unités de l'entier $(2019)^{2018}$

Exercice 2 (6,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit la parabole (P) d'équation :

$$2x + 3y^2 + 4y - 1 = 0$$

- 1) a/ Montrer que (P) est une parabole dont on précisera le sommet S , le foyer F et la directrice (D) .
b/ Construire (P)
- 2) Soit M_0 le point de (P) d'abscisse -3 et d'ordonnée positive.
a/ déterminer une équation de la tangente (T) à (P) au point M_0
b/ Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) au point M_0
- 3) (T) coupe l'axe focal (Δ) de (P) au point I et (N) coupe (Δ) en J .
a/ Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$.
b/ Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur (Δ) , montrer que la distance JK est égal au paramètre de (P) .

Exercice 3 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a/ Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
b/ Dresser le tableau de variation de f .
c/ Étudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$
d/ Construire (C) .
- 2) Soit n un entier naturel non nul.
a/ Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{n}{x-1}$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution α_n .
b/ montrer que pour tout $n \geq 3$, $1 < \alpha_n < (Ln n)^2 + 1$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_n}{n} \right)$
- 3) Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_1^{1+x^2} f(t) dt$
a/ Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R} et que $F'(x) = 2xe^{|x|}$
b/ En intégrant par parties, calculer $F(x)$ pour $x \geq 0$
- 4) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 2$.
- 5) Soit n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 0 et $n - 1$. On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
a/ Montrer que : $\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
b/ Montrer que : $\frac{1}{n} + \mathcal{A} \leq U_n \leq \frac{e}{n} + \mathcal{A}$. En déduire la limite de la suite (U_n) .

