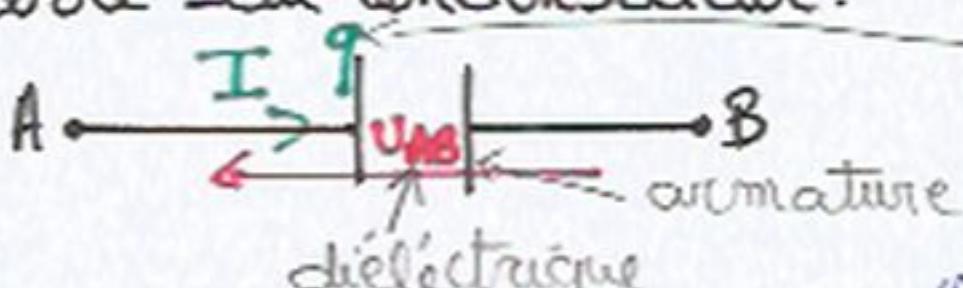


Résumé de cours: Le condensateur et le dipôle RC.

A) Le condensateur.

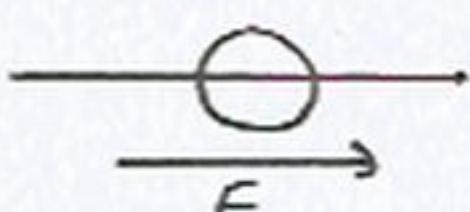
- Un condensateur est un dipôle électrique constitué par deux plaques conductrices (dites armatures) séparées par un isolant appelé diélectrique.

symbole du condensateur: charge de l'armature vers laquelle est orienté le sens positif du courant. (q exprimée en Coulomb)



- Le condensateur est un composant électrique capable de stocker des charges électriques.

Chargement par un générateur de tension idéale



À la fin de la charge: $U_C = E$, $i = 0$ et $q = Q$.

À la fin de la décharge: $U_C = 0$, $i = 0$ et $q = 0$

- i variable

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Chargement par un générateur de courant / d'intensité $I = i_0$

- i constante

$$q = q(t) - q(t_0)$$

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ et à } t_0 = 0; q(t_0) = 0$$

$$\text{d'où } I = \frac{q}{t} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{en Coulomb} \\ \leftarrow \text{en Seconde} \end{matrix}$$

$$U_C = \frac{E}{C} \cdot t \quad \left(\frac{q}{C} \right)$$

$$q = C \times U_C$$

C : capacité du condensateur exprimée dans le système international d'unité en Farad.

c'est une grandeur physique positive qui caractérise l'aptitude d'un condensateur à emmagasiner une charge électrique lorsqu'il est soumis à une tension électrique U_C .

Rq: La capacité C d'un condensateur plan (armatures planes et parallèles) est exprimée par la relation: $C = \frac{E \times S}{d}$ tel que:

S : surface en regard des deux armatures (m^2)

d : épaisseur du diélectrique (m)

E : permittivité absolue du condensateur qui ne dépend que de la nature du diélectrique ($F \cdot m^{-1}$) $E = E_0 \times \epsilon_r$ permittivité relative du diélectrique (sans unité)

- La tension de claquage est la plus petite tension (en valeur absolue) faisant jaillir une étincelle entre les armatures du condensateur.

- La tension de service d'un condensateur (tension nominale) est la tension indiquée par le constructeur qui est inférieure à la tension de claquage.

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Surface en regard des 2 armatures} \\ \text{épaisseur du diélectrique entre les 2 armatures.} \end{array}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$$

ϵ_r : perméabilité relative de la substance.

$$U_C = \frac{q}{C} \leftarrow \begin{array}{l} C \\ F \end{array} \quad (V = C \cdot F)$$

\uparrow
tension aux bornes d'un condensateur.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

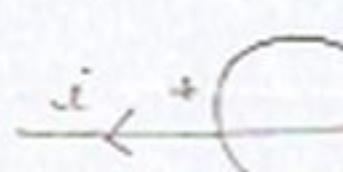
$$\text{et } U_C = \frac{q}{C}; \quad q = U_C \times C$$

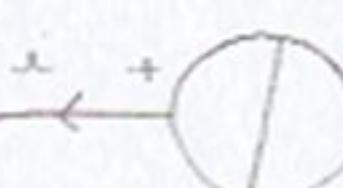
- i : variable

I : cte

$$\text{d'où } i = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

$$E_C = W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot U_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q \cdot U}{C} \text{ car } q = C \cdot U$$

 : Générateur de tension ($U = \text{cte}$)

 : Générateur de courant ($I = \text{cte}$)

$$\text{Lorsque } I = \text{cte}; \quad U_C = \frac{q}{C} = \frac{I}{C} t \xrightarrow{\text{tension de charge}}$$

tension de charge. Plus petite tension faisant jaillir une étincelle entre les armatures du condensateur.

Tension de service = tension nominale du condensateur / nettement inférieure à celle de claquage

- L'énergie électrostatique, E_C emmagasinée par un condensateur est exprimée par: $E_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \cdot U_C^2 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot U_C$ (exprimée en Joules)

B/ Le dipôle RC:

I) Au cours de la charge du condensateur:

Régime transitoire
q↑ progressivement

Régime permanent
q est constante

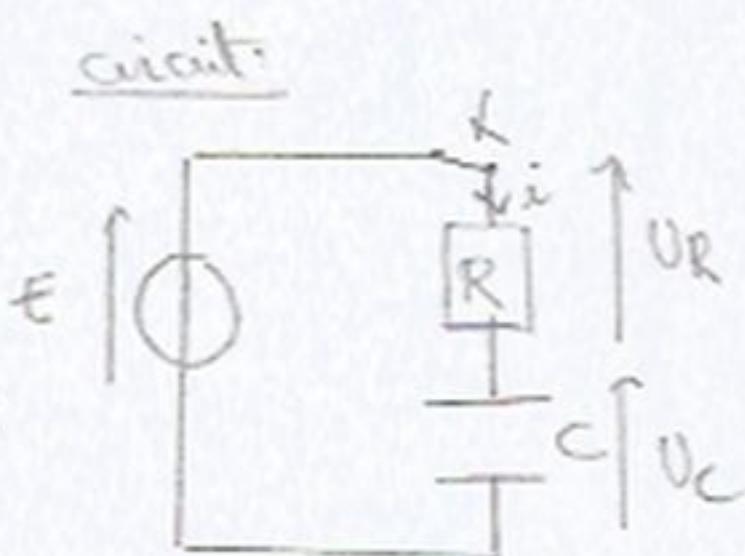
équations différentielles:

U_C : D'après la loi de maille: $U_R + U_C - E = 0$ d'où $U_R + U_C = E$

D'après la loi d'Ohm: $U_R = R \cdot i = R \frac{dq}{dt}$ ou $q = U_C \times C$

alors $U_R = R \cdot C \frac{dU_C}{dt}$; d'où l'éq diff: $R \cdot C \frac{dU_C}{dt} + U_C = E$

on pose $C = RC$; $\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} = \frac{E}{RC}$



solution: $U_C = E(1 - e^{-t/RC})$

q : Loi des mailles; $U_R + U_C - E = 0$; $U_R + U_C = E$; or $U_R = R \cdot i$ alors

$R \frac{dq}{dt} + U_C = E$ ou $U_C = \frac{q}{C}$; d'où $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$

$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$; l'éq diff est: $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$
solution: $q = E \cdot C (1 - e^{-t/RC})$

i : Loi des mailles: $U_R + U_C - E = 0$; $U_R = R \cdot i$ d'où $R \cdot i + \frac{q}{C} = E$

on dérive; $R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$

d'où $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$; l'éq différentielle est: $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0$
solution: $i = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$

U_R : $R \left(\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0 \right)$ alors $\frac{d(Ri)}{dt} + \frac{1}{C} R \cdot i = 0$ d'où l'éq diff est:

$\frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{RC} U_R = 0$ solution: $U_R = E \cdot e^{-t/RC}$

- A l'instant $t=0,69 \text{ s}$, le condensateur est chargé à 50% de sa charge maximale.

(à cet instant, $U_C = U_R = \frac{E}{2}$)

* Détermination de la constante de temps τ du dipôle RC :

Soit T : tg à U_C à $t=0$ d'eq $U_C = at$ avec $a = \frac{dU_C}{dt} (t=0)$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ à } t=0 \quad \frac{dU_C}{dt} (t=0) = \frac{E}{RC} \text{ donc } U_C(t) = \frac{E}{RC} t$$

Soit T' l'asymptote à U_C d'eq $U_C = E$.

Aupoint d'intersection de T et T' on a $\frac{E}{RC} t = E$ donc $t = RC$
d'où τ est l'abscisse du point d'intersection de T et T' .

L'essentiel du cours

Date:
12/01

118

e

I) Oscillations libres amorties

- Un circuit constitué d'un dipôle RL fermé sur un condensateur initialement chargé peut être le siège d'oscillations électriques amorties. Ces oscillations qui s'effectuent d'elle-même sans intervention de l'extérieur sont dites libres.
- Les oscillations libres amorties sont des oscillations pseudo périodiques de pseudo période T (régime pseudo-périodique).
- Un circuit RLC fermé sur un condensateur initialement chargé ne peut osciller librement que lorsque l'amortissement est faible. Plus la résistance du circuit est grande, plus la pseudo période est grande. Avec des valeurs élevées de R, le régime n'est plus oscillatoire, il est apériodique.
- Le retour le plus rapide à l'état d'équilibre sans aucune oscillation est connu sous le nom régime critique ($R=R_c$)

Etude théorique

- Équation différentielle régissant l'évolution d'un circuit RLC en régime libre : $u_e + u_R + u_C = 0$ (Loi des mailles)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ avec } R(R_0+r)$$

- $E = E_L + E_C \Rightarrow$ énergie électromagnétique.

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} ; E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$$

- Ri^2 : Puissance dissipée en chaleur dans la résistance totale du circuit.
 \Rightarrow Au cours des oscillations l'énergie du circuit RLC diminue. Cette diminution apparaît sous forme de chaleur par effet Joule.
 \Rightarrow Il y a au cours des oscillations pseudo périodiques des transformations mutuelles d'énergie électrostatique et magnétique. Mais à cause de la résistance R (de tout le circuit) les transformations ne sont pas intégrales (toujours il y a de diminution).

II) Oscillations libres non amorties $R=0$

- Équation différentielle :

$$u_e + u_C = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{On pose } \frac{1}{LC} = w_0^2 \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

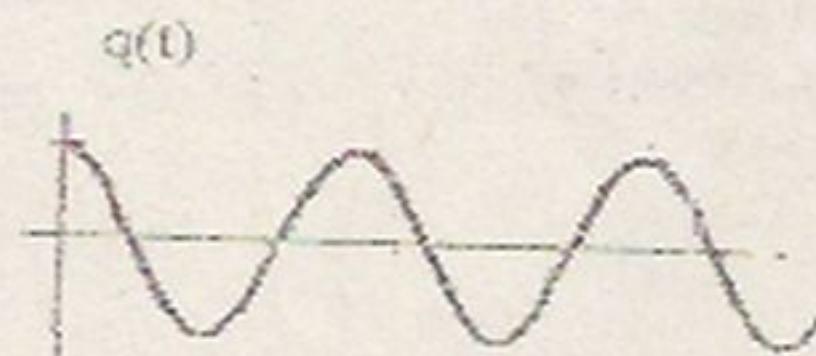
- La solution de cette équation est : $q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$

Q_0 : l'amplitude des oscillations de $q(t)$

w_0 : pulsation propre (rad s^{-1})

φ_q : phase initiale (rad)

- La nature des oscillations d'un circuit LC est sinusoïdale



Chap III : RLC libre

physique

- * $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$: période propre (en s) $\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
- * $N_0 = \frac{1}{T_0}$: fréquence propre (en Hz) $\Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$$* E = E_c + E_L \Rightarrow \frac{dE}{dt} = L \left(\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q \right) = 0$$

donc, $E = \text{constante}$

On dit que l'énergie totale de l'oscillation LC se conserve.

$$E = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{constante}$$

$$* q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2C} Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$$

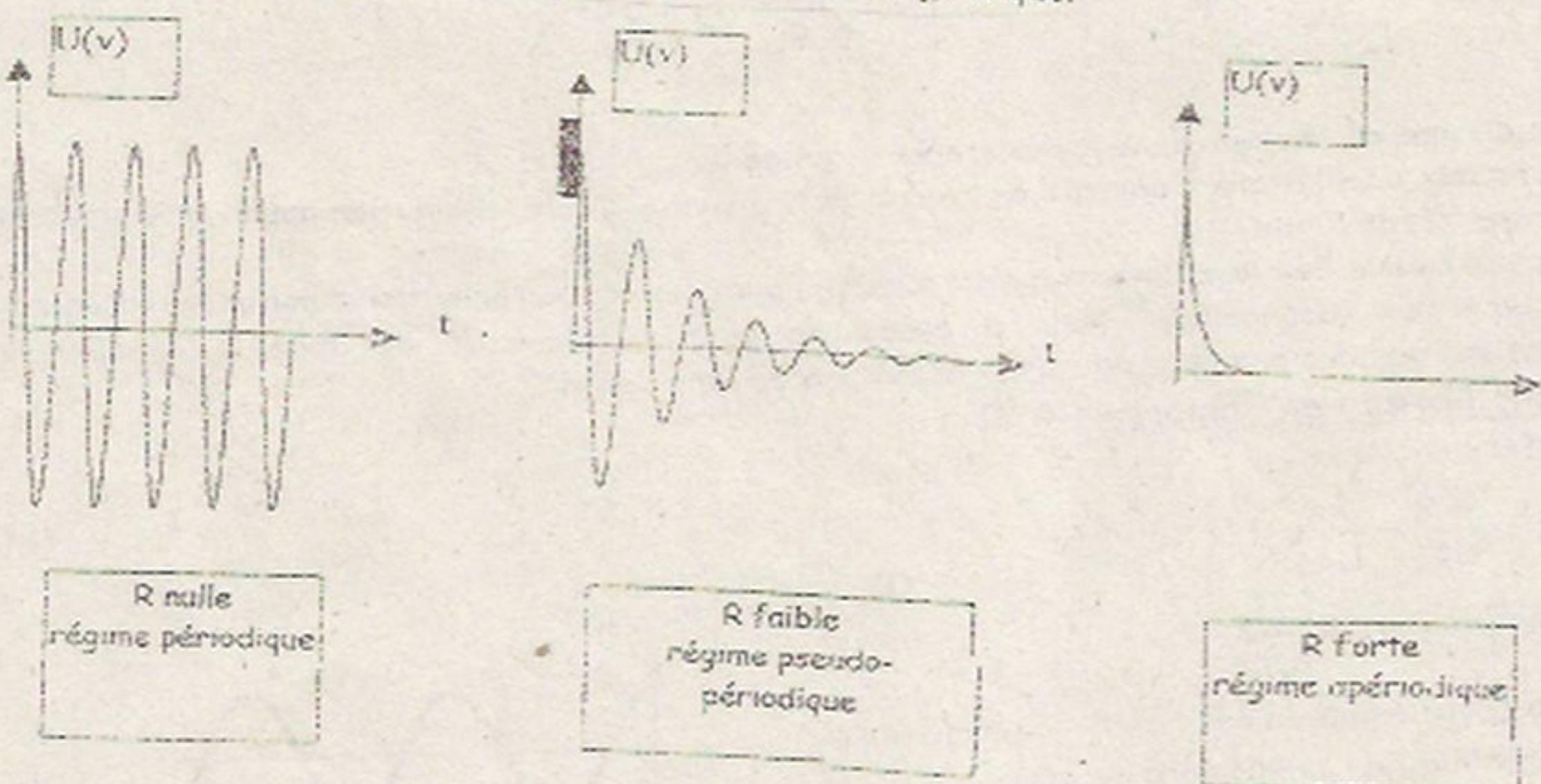
$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} L (Q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_q))^2$$

$$= \frac{1}{2} L (\omega_0^2 Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q))$$

$$= \frac{1}{2C} (Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q))$$

- * Les oscillations libres d'un circuit RLC non amorties sont dues au transformation mutuelle et intégrale (sans perte) de ses énergies électrostatique et magnétique.



Exercices à résoudre

Les oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal:

- La réponse d'un dipôle RLC série à une tension sinusoïdale $u(t)$ est l'établissement d'un courant électrique d'intensité $i(t)$ variant sinusoïdalement au cours du temps avec la fréquence N imposée par l'excitateur (GBF) tel que $i(t) = I_m \sin(2\pi Nt + \phi_i)$ avec $N \neq N_0$ et $N_0 = \frac{1}{\sqrt{L/C}}$
- à la résonance d'intensité et lorsqu'en \uparrow la résistance totale, $I_m \downarrow$.

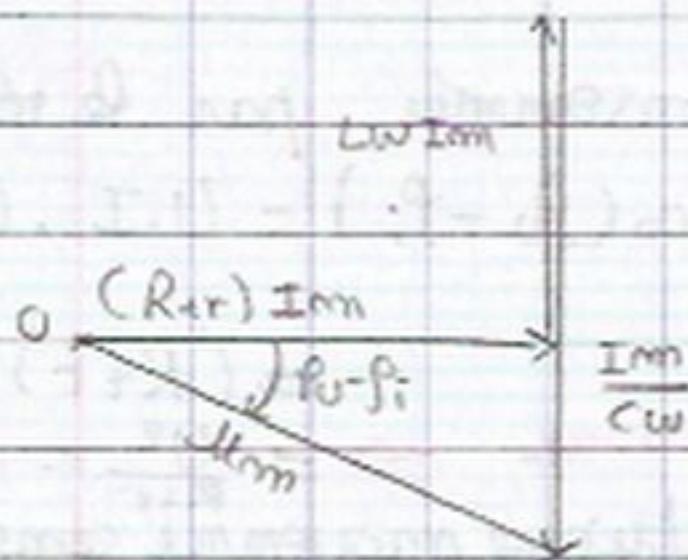
$$-\frac{\pi}{2} < \Delta\phi = \phi_u - \phi_i < \frac{\pi}{2}$$

équation différentielle en i : $L \frac{di}{dt} + (R+r)i + \frac{1}{C} \int i dt = u$

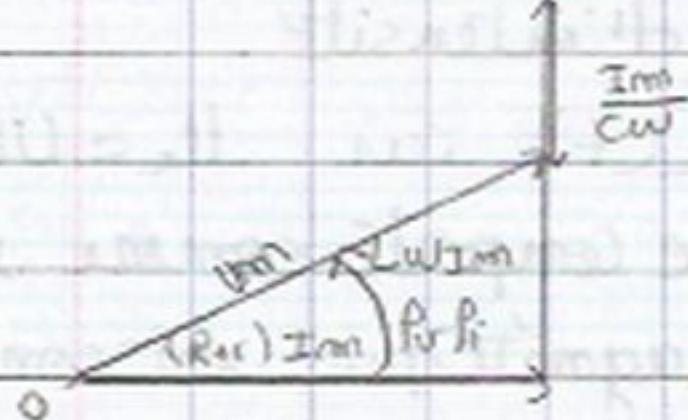
équation différentielle en q : $L \frac{d^2q}{dt^2} + (R+r) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u$

- $\omega < \omega_0 \quad (-\frac{\pi}{2} < \phi_u - \phi_i < 0)$

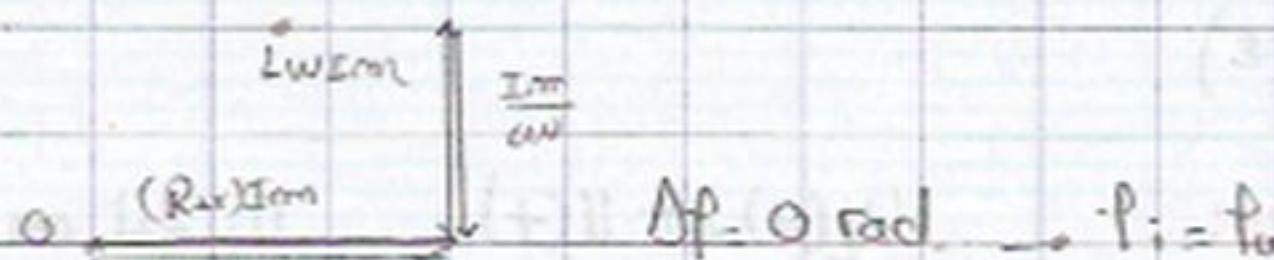
$$\omega^2 < \frac{1}{LC} \quad LW < \frac{1}{\omega C} \quad \rightarrow LW I_m < \frac{I_m}{\omega C} \text{ et le circuit est capacif}$$



- $\omega > \omega_0 \quad (\phi_u - \phi_i < -\frac{\pi}{2}) \quad \omega^2 > \frac{1}{LC} \quad LW I_m > \frac{I_m}{\omega C} \text{ et le circuit est inductif}$



- $\omega = \omega_0 \quad ; \quad LW I_m = \frac{I_m}{\omega C} \text{ et le circuit est résistif.}$



En appliquant le théorème de Pythagore:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (LW - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

avec $Z = \sqrt{(R+r)^2 + (LW - \frac{1}{\omega C})^2}$

$$\cos(\phi_u - \phi_i) = \frac{(R+r) I_m}{U_m}, \quad \tan(\phi_u - \phi_i) = \frac{LW - \frac{1}{\omega C}}{R+r} \text{ et } \sin(\phi_u - \phi_i) = \frac{LW I_m - \frac{I_m}{\omega C}}{U_m}$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}, Z_L = L\omega, Z_B = \sqrt{r^2 + (\omega C)^2}, Z_{B-C} = \sqrt{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

- À la résonance d'intensité on définit Q le facteur de surtension comme étant le quotient de la tension efficace U_C aux bornes du condensateur par la tension efficace U aux bornes du générateur. $Q = \frac{U_C}{U} = \frac{U_{mC}}{U_m}$

or $\omega = \omega_0$, $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$, $Z_L = Z_C$ d'où $U_L = U_C$

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{C\omega_0(R+r)} = \frac{1}{(R+r)\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{Z_L}{Z_{R+r}} = \frac{Z_C}{Z_{R+r}}$$

- Si $Q > 1$ alors il y a phénomène de surtension.
- Si $Q < 1$ alors il n'y a pas de phénomène de surtension.
- Si $(R+r) \gg Q$
- La puissance moyenne électrique consommée par le résonateur RLC :

$$P_{moy} = \frac{1}{2} U_m \cdot I_m \cos(\omega_0 t - \phi) = U \cdot I \cos(\omega_0 t - \phi) = U \cdot I \cdot \frac{U_m}{R+r} \cdot \frac{I_m}{U_m}$$

facteur de puissance

$$\omega = \omega_0 \rightarrow P_{moy} = \frac{U^2}{R+r} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{R+r} \cdot \frac{I_m^2}{U_m^2}$$

$P_{moy} = \frac{E_{moy}}{\Delta t} \rightarrow J$ avec E_{moy} : énergie électrique moyenne consommée par le résonateur RLC.

- P_{moy} est maximale à la résonance d'intensité.
- À la résonance on a : $I_L(t) = -U_C(t)$ car $I_C = U_L$ et $\phi_{U_L} = \phi_{U_C} \pm \pi$.

d'où $U_C(t) + U_L(t) = 0 \rightarrow$ le circuit se comporte comme un dipôle LC.

- À la R. intensité, l'énergie électromagnétique est constante.

$$\frac{dE_T}{dt} = i(U_C + L\frac{di}{dt}) \text{ or } I_C + L\frac{di}{dt} = U - (R+r) \cdot i = 0$$

$$(E_T = \frac{1}{2} C \cdot U_C^2 + \frac{1}{2} L i^2).$$

Identification des courbes :

- $U_R(t)$ et $I(t)$; $U_m > U_{rm}$
- $I_B(t)$ et $I(t)$, $U_m > U_{Bm}$
car $Z_B = \sqrt{r^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega C})^2}$
- $I_C(t)$ et $U(t)$, on a $\pi/2 < \phi_U - \phi_{U_C} < \pi/2$
 $0 < \phi_U - \phi_{U_C} < \pi$ donc $I_C(t)$ est en avance.
à la R.int, I_C est en quad.avance.

$U_L(t)$ et $I(t)$, I_L est en avance.

$$I_L(t) = L\frac{di}{dt} \text{ et } L > 0 \text{ d'où } \phi_{U_L} = \phi_i + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{or } -\frac{\pi}{2} < \phi_U - \phi_i < \frac{\pi}{2} \text{ d'où } -\pi/2 < \phi_U - \phi_{U_L} < 0$$

à la résonance I_L en quad.avance.

- $I_B(t)$ et $I(t)$; $I_B(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $I(t)$ (d'après la construction de Fresnel).

Montrer qu'il existe une autre pulsation telle que la valeur de l'ampermètre ne change pas : circuit capacitif : $\omega = \omega_1$, $\operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1}{R+r}$ (I)

circuit inductif : $\omega = \omega_2$, $\operatorname{tg}(\varphi_i - \varphi_u) = \frac{\frac{1}{C\omega_2} - L\omega_2}{R+r}$ (II)

(I) = -(II) Alors

$$\frac{\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1}{R+r} = \frac{L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}}{R+r} \text{ si } \frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}$$

$$\frac{1}{C\omega_1} + \frac{1}{C\omega_2} = L\omega_2 + L\omega_1$$

$$\frac{1}{C} \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{\omega_1 \omega_2} \right) = L(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\frac{1}{LC} = \omega_1 \omega_2$$

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$$

$$\frac{2\pi f}{E_d} = \varphi \rightarrow \text{facteur de surtension}$$

. $I_{eff} = I_{max}$ ssi il y a des fcts sinusoidales sinon $I_{eff} < I_{max}$.
(La des mesuds : v_2 : $i = i_1 + i_2$)

Un tableau d'analogie p2S (complet)

Analogie électrique - mécanique

éq diff: $\frac{L \frac{d^2q}{dt^2} + (R+r) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - U}{C}$ $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \cdot \frac{dx}{dt} + kx = F$

énergie de l'oscillateur: $E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow E = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} m v^2$

Amplitude: $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 \omega^2 + \left(\frac{1}{C} - \omega^2\right)^2}}$ $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(h \omega)^2 + (K - m \omega^2)^2}}$

Résonance: $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$ $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$, $h_{lim} = \sqrt{2mK}$

Déphasage: $\operatorname{tg}(\Delta\phi = f_0 - f_q) = \frac{(R+r)}{\frac{1}{C\omega} - L\omega}$ $\operatorname{tg}(\phi_f - \phi_x) = \frac{h}{K - m\omega^2} = \frac{h\omega}{K - m\omega^2}$

$$\sin(\phi_0 - \phi_q) = \frac{(R+r) Im\omega^2}{U_m} \rightarrow \sin(\phi_f - \phi_x) = \frac{h X_m \omega}{F_m}$$

$$\cos(\phi_0 - \phi_q) = \frac{1}{C} \frac{Im\omega}{U_m} \rightarrow \cos(\phi_f - \phi_x) = \frac{K X_m - m X_m \omega^2}{F_m}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{X_m}{F_m} (K - m\omega^2)$$

Remarque: A la résonance de vitesse ($\omega = \omega_0$) on a: $F(t)$ et $f(t)$ sont en opposition de phase et de même amplitude.

sens de transfert de l'énergie entre l'oscillateur et l'excitateur:

L'excitateur (moteur) fournit de l'énergie au résonateur (pendule élastique) pour lui compenser progressivement l'énergie perdue par frottement.

A la résonance d'elongation: l'énergie réelle est supérieure à l'énergie perdue $\rightarrow X_m$ prend des valeurs maximales

• La lumière monochromatique est une onde électro-magnétique progressive sinusoidale de fréquence unique.

La couleur de cette lumière dépend de sa fréquence.

• La lumière blanche résulte de l'exposition d'une infinité de lumières de couleurs différentes allant du rouge au violet.

• **La dispersion** de la lumière est la variation de sa vitesse v dans un milieu dispersif d'indice n en fonction de sa fréquence. ($n = \frac{c}{v}$)

Remarque: dans le vide $v_0 = \frac{c}{n} = T.C$

dans un milieu dispersif $v_0 = \frac{c}{n} = T.V.$

• **Réflexion**: Face à un étendue peu, $\frac{c}{n} = \frac{c}{n \cdot N}$
d'onde incidente progressive plane n'est pas une réflexion: elle donne naissance à une onde prog. plane réfléchie de même longueur d'onde et d'angle de réflexion égal à celui d'incidence.

• **Refraction**: Passage d'une onde d'un milieu à un autre avec changement de vitesse ($\text{parcours } l$),
si la direction l à la surface de séparation \rightarrow transmission
sinon réfraction $\rightarrow (sini_1) \cdot \lambda_2 = (sin i_2) \cdot \lambda_1$

Phénomène de diffraction.

Si on remplace la fente rectangulaire F par une autre fente circulaire on obtient comme figure :



- Le son est de nature vibratoire ; c'est une onde mécanique dite onde sonore acoustique. C'est une onde progressive sphérique qui s'atténue en s'éloignant de la source à cause de la dilution d'énergie.

• **La diffraction:** C'est la modification de la direction de propagation lorsque l'onde passe au voisinage des bords d'un obstacle ou traverse une petite fente de largeur (a) telle que la fréquence N , la vitesse V et λ ne sont pas modifiés.

• **La réflexion:** C'est le changement de la direction de propagation de l'onde incidente dans le même milieu propagateur lorsqu'elle rencontre une surface réfléchissante. L'onde incidente et l'onde réfléchie ont la même longueur d'onde, la même fréquence, la même vitesse et la même forme de ripples.

• **La réfraction:** Changement de direction de propagation lorsque l'onde rencontre une surface de séparation entre deux milieux propagateurs différents. L'onde incidente et l'onde réfractée ont la même fréq. N , différentes λ et différentes vitesses de propagation.

$$\frac{V}{V_i} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{n_{ii}}{n_{ii'}}$$

• **transmission:** direction de l'onde à la surface de séparation. (mais $C \neq$ et $\lambda \neq$ seulement la direction est conservée).

○ La dispersion:

- On observe sur l'écran le spectre visible de la lumière blanche limité par un raie rouge (le moins dévié) et un raie violette (le plus dévié).
- les différentes radiations ne sont pas déviées du même angle par un prisme: → **phénomène de dispersion.**

$$n = \frac{c}{v}$$

3.10 m.s⁻¹ (vitesse de la lumière dans le vide).
↑ v (vitesse de propagation de la radiation dans le milieu).
indice de réfraction (transm.)

- La fréq. est **invariante**.
- v et λ dépendent de la nature du milieu transparent.
- n dépend de la fréquence de la radiation lumineuse.

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 v}{\lambda v} = \frac{\lambda_0}{\lambda} > 1$$

○ **milieu dispersif:** c'est un milieu transparent dont l'indice de réfraction n dont la vitesse d'une radiation lumineuse dépend de sa fréquence.

Exemples: + l'eau est non dispersif
+ le verre est dispersif