|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Mathématiques**  <http://matheleve.net/> | **Arithmétique** | *Classe :4émeinf*  *Prof : Mr. Chortani* |

##### **Exercice 1**

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

**Exercice 2**

Quel est le reste de la division par 7 du nombre (32)45

**Exercice 3**

1) Déterminer les restes de la division de 5p par 13 pour p entier naturel.

2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

N = 314n+1 + 184n−1 est divisible par 13.

**Exercice 4**

On considère l'équation (E) : 36x - 25 y = 5 , ( x , y ) Z².

1) Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que 36u + 25v = 1.

2) Donnez alors une solution particulière de (E).

3) Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?

4) ( x , y) étant une solution particulière de (E), on appelle d le PGCD de x et y.

Quelles sont les valeurs possibles de d?

Quelles sont les solutions (x , y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?

**Exercice 5**

(E) est l'équation dans **Z²** : 36x - 49y = 13.  
a) Déterminez l'ensemble des solutions de (E).  
b) Peut-on trouver un couple (x , y) dans **Z** tel que (x² , y²) soit solution de (E) ?  
c) Peut-on trouver xhttp://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/in.gif**Z** tel que (x , x) soit solution de (E) ?

**Correction**

##### **Exercice 1**

Ona320=q×b+39⟺q×b=320−39=281. Cherchons les diviseurs de 281 ;sont 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

**Exercice 2**

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 42 donne 2, 43 donne 8, soit 1 ; comme 45 = 15×3, on a :

3245≡445[7]≡(43)15 [7]≡115[7]≡1[7]

**Exercice 3**

1) p = 0 : 1, p = 1 : 5, p = 2 : −1 ou 12, p = 3 : −5 ou 8, p = 4 : 1 donc

pour p=4k le reste est 1,

pour p=4k+1 le reste est 5,

pour p=4k+2 le reste est 12 ou −1,

pour p=4k+3 le reste est 8 ou −5.

2)N≡(314n+1+184n-1)[13]≡(54n+1+54n-1)[13]≡(5+8à[13]≡0[13]

On a donc la première solution pour k = 1, ce qui donne la solution (514, 117).

**Exercice 4**

1)On applique l'Algorithme d'Euclide.  
36 = 1×25 + 11 , 25 = 2×11 + 3 , 11 = 3×3 + 2 , 3 = 1×2 + 1.  
D'où   
11 = (36 - 25) , 3 = (25 - 2×11) = 25 - 2× (36-25) = 3×25 - 2×36  
2 = 11 - 3×3 = (36 - 25) - 3× (3×25 - 2×36) = 7×36 - 10×25  
1 = 3 - 1×2 = (3×25 - 2×36) - (7×36 - 10×25) = 13×25 - 9×36  
On a donc la relation : 36u + 25v = 1 avec u = -9 et v = 13.

2)En solution particulière de (E) est alors : xo = 5×u , yo = -5×v  
ou encore (xo = -45 , yo = -65)  
On peut aussi voir directement que (5 , 7) est une solution de (E)  
3)L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensembles des couples (x = -45 +25k , -65 +36k)   
où k est quelconque dans **Z**.  
C'est aussi l'ensemble des couples (5 + 25k , 7 + 36k).

4) Dire que d est le PGCD de x et y revient à dire qu'il existe k et k' premiers entre eux tels que:x = kd et y =k'd.  
Si de plus (x , y ) est solution , on a : 36kd - 25k'd = 5 ou encore d(36k - 25k' ) = 5.  
Or , 5 est premier. Cette dernière égalité montre alors que d = 1 ou d = 5.  
  
x et y sont premiers entre eux si et seulement si d = 1.  
D'après le résultat précédent, comme d = 1 ou 5, on peut dire que x et y solutions et (E)   
et premiers entre eux si et seulement si ils ne sont pas tous les deux divisibles par 5.

Or, les solutions de (E) sont x = -45 + 25k et y = -65 + 36k. avec khttp://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/in.gif**Z**.  
Comme x est divisible par 5 pour toute valeur k, on peut dire que x et y sont premiers   
entre eux si et seulement si y n'est pas divisible par 5.

Or, -65 http://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/congru.gif0 [5] et 36 http://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/congru.gif1 [5] donc pour tout k dans **Z**, on a : -65 + 36khttp://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/congru.gifk [5].  
y est donc non-multiple de 5 si et seulement si k≢ 0 [ 5].  
Les solutions '(x , y ) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les  
solutions (-45 + 25k , -65 +36k) telles que k≡0 [ 5].

On peut aussi utiliser la forme des solutions de (E) , ( x = 5 + 25k , y = 7 + 36k).  
(x , y ) est solution de (E) avec x et y premiers entre eux si et seulement   
si y n'est pas divisible par 5 ou encore si 7 + 36k n'est pas congru à 0 modulo 5.

Or 7 + 36khttp://www.maths-express.com/bac-exo/bac-s/cour-s/arth/congru.gif2 + k [5].  
y n'est donc pas divisible par 5 si et seulement si k≢3[ 5].

Les solutions '(x , y ) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les  
solutions (5 + 25ki , 7 + 36k ) telles que k≢3[ 5].

**Exercice 5**

**1)** On peut remarquer qu'une solution particulière de (E) est (x = -1 , y = -1).  
L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des couples  
(x = -1 + 49k , -1 + 36k ) où k ∈**ℤ**.

**2)** Dire que (x² , y² ) est solution de (E) revient à dire que l'on a : 36x² - 49y² = 13.  
Or 36x² - 49y² = (6x - 7y)(6x + 7y).  
On obtient alors l'égalité : (6x - 7y)(6x + 7y) = 13.  
Comme 13 est premier, ces seuls diviseurs sont : 1 , -1 , 13 et -13.  
On peut alors dire que (x² , y² ) est solution de (E) si et seulement si :

(6x - 7y = 1 et 6x + 7y = 13 ) ou (6x - 7y = -1 et 6x + 7y = -13)

Si (6x - 7y = 1 et 6x + 7y = 13 ) alors 12x = 14 . Impossible car x est entier.  
Si (6x - 7y = -1 et 6x + 7y = -13) alors 12x = - 14 . Impossible aussi.

Conclusion: Il n'existe aucun couple de la forme (x² , y² ) solution de (E).

**3)** Dire que (x ,x) est solution de (E) revient à dire que -13x = 13.  
Donc la seule valeur possible pour x est : x = -1.