

Exercice 1

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Exercice 2

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Exercice 3

- 1) Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
- 2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4

On considère l'équation (E) : $36x - 25y = 5$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

- 1) Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que $36u + 25v = 1$.
- 2) Donnez alors une solution particulière de (E).
- 3) Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?
- 4) (x, y) étant une solution particulière de (E), on appelle d le PGCD de x et y .
Quelles sont les valeurs possibles de d ?
Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux ?

Exercice 5

(E) est l'équation dans \mathbb{Z}^2 : $36x - 49y = 13$.

- a) Déterminez l'ensemble des solutions de (E).
- b) Peut-on trouver un couple (x, y) dans \mathbb{Z}^2 tel que (x^2, y^2) soit solution de (E) ?
- c) Peut-on trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que (x, x) soit solution de (E) ?

Correction**Exercice 1**

On a $320 = q \times b + 39 \Leftrightarrow q \times b = 320 - 39 = 281$. Cherchons les diviseurs de 281 ; sont 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b .

Exercice 2

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme $45 = 15 \times 3$, on a :

$$32^{45} \equiv 4^{45} [7] \equiv (4^3)^{15} [7] \equiv 1^{15} [7] \equiv 1 [7]$$

Exercice 3

1) $p = 0 : 1, p = 1 : 5, p = 2 : -1$ ou $12, p = 3 : -5$ ou $8, p = 4 : 1$ donc

pour $p=4k$ le reste est 1,

pour $p=4k+1$ le reste est 5,

pour $p=4k+2$ le reste est 12 ou -1 ,

pour $p=4k+3$ le reste est 8 ou -5 .

$$2) N \equiv (31^{4n+1} + 18^{4n-1}) [13] \equiv (5^{4n+1} + 5^{4n-1}) [13] \equiv (5 + 8^4) [13] \equiv 0 [13]$$

On a donc la première solution pour $k = 1$, ce qui donne la solution $(514, 117)$.

Exercice 4

1) On applique l'Algorithme d'Euclide.

$$36 = 1 \times 25 + 11, 25 = 2 \times 11 + 3, 11 = 3 \times 3 + 2, 3 = 1 \times 2 + 1.$$

D'où

$$11 = (36 - 25), 3 = (25 - 2 \times 11) = 25 - 2 \times (36 - 25) = 3 \times 25 - 2 \times 36$$

$$2 = 11 - 3 \times 3 = (36 - 25) - 3 \times (3 \times 25 - 2 \times 36) = 7 \times 36 - 10 \times 25$$

$$1 = 3 - 1 \times 2 = (3 \times 25 - 2 \times 36) - (7 \times 36 - 10 \times 25) = 13 \times 25 - 9 \times 36$$

On a donc la relation : $36u + 25v = 1$ avec $u = -9$ et $v = 13$.

2) En solution particulière de (E) est alors : $x_0 = 5 \times u, y_0 = -5 \times v$

ou encore $(x_0 = -45, y_0 = -65)$

On peut aussi voir directement que $(5, 7)$ est une solution de (E)

3) L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(x = -45 + 25k, -65 + 36k)$

où k est quelconque dans \mathbf{Z} .

C'est aussi l'ensemble des couples $(5 + 25k, 7 + 36k)$.

4) Dire que d est le PGCD de x et y revient à dire qu'il existe k et k' premiers entre eux tels que $x = kd$ et $y = k'd$.

Si de plus (x, y) est solution, on a : $36kd - 25k'd = 5$ ou encore $d(36k - 25k') = 5$.

Or, 5 est premier. Cette dernière égalité montre alors que $d = 1$ ou $d = 5$.

x et y sont premiers entre eux si et seulement si $d = 1$.

D'après le résultat précédent, comme $d = 1$ ou 5 , on peut dire que x et y solutions et (E) et premiers entre eux si et seulement si ils ne sont pas tous les deux divisibles par 5.

Or, les solutions de (E) sont $x = -45 + 25k$ et $y = -65 + 36k$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Comme x est divisible par 5 pour toute valeur k , on peut dire que x et y sont premiers entre eux si et seulement si y n'est pas divisible par 5.

Or, $-65 \equiv 0 [5]$ et $36 \equiv 1 [5]$ donc pour tout k dans \mathbf{Z} , on a : $-65 + 36k \equiv k [5]$.

y est donc non-multiple de 5 si et seulement si $k \not\equiv 0 [5]$.

Les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions $(-45 + 25k, -65 + 36k)$ telles que $k \not\equiv 0 [5]$.

On peut aussi utiliser la forme des solutions de (E), $(x = 5 + 25k, y = 7 + 36k)$.

(x, y) est solution de (E) avec x et y premiers entre eux si et seulement

si y n'est pas divisible par 5 ou encore si $7 + 36k$ n'est pas congru à 0 modulo 5.

Or $7 + 36k \equiv 2 + k \pmod{5}$.

y n'est donc pas divisible par 5 si et seulement si $k \not\equiv 3 \pmod{5}$.

Les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions $(5 + 25ki, 7 + 36k)$ telles que $k \not\equiv 3 \pmod{5}$.

Exercice 5

1) On peut remarquer qu'une solution particulière de (E) est $(x = -1, y = -1)$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des couples

$(x = -1 + 49k, -1 + 36k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dire que (x^2, y^2) est solution de (E) revient à dire que l'on a : $36x^2 - 49y^2 = 13$.

Or $36x^2 - 49y^2 = (6x - 7y)(6x + 7y)$.

On obtient alors l'égalité : $(6x - 7y)(6x + 7y) = 13$.

Comme 13 est premier, ces seuls diviseurs sont : 1, -1, 13 et -13.

On peut alors dire que (x^2, y^2) est solution de (E) si et seulement si :

$(6x - 7y = 1 \text{ et } 6x + 7y = 13)$ ou $(6x - 7y = -1 \text{ et } 6x + 7y = -13)$

Si $(6x - 7y = 1 \text{ et } 6x + 7y = 13)$ alors $12x = 14$. Impossible car x est entier.

Si $(6x - 7y = -1 \text{ et } 6x + 7y = -13)$ alors $12x = -14$. Impossible aussi.

Conclusion: Il n'existe aucun couple de la forme (x^2, y^2) solution de (E).

3) Dire que (x, x) est solution de (E) revient à dire que $-13x = 13$.

Donc la seule valeur possible pour x est : $x = -1$.