Chapitre 1 : Limites et continuité

Limite et Continuité

I Rappel :

I.1 Activité 1 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \dots\dots$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-4}{-x^2+3x-2} = \dots\dots$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \dots\dots$

   $= \dots\dots$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \dots\dots$

I.2 Activité 2 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{6x-x^3+x\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{3}} = \dots\dots$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x^2-3}-2x = \dots\dots$

   $= \dots\dots$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^3} \times \sqrt{-x+3} = \dots\dots$

   $= \dots\dots$

Rappel :

$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a \quad$ pour $a \in \mathbb{R}$
$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$	$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$	$\star\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{x} = a \quad$ pour $a \in \mathbb{R}$

I.3 Activité 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-2\cos x}{\sin x} = \dots\dots$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x} = \dots\dots$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 3x}{\cos x - 1} = \dots\dots$

I.4 Activité 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \frac{2}{3} & . \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 2.
Solution :

....

....

....

....

Rappel :

- ✓ Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
- ✓ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- ✓ La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ,\ +\infty[= \mathbb{R}_+$.

I.5 Activité 6 page 10 :

1. ....
2. ....
3. ....

I.6 Exercice 3 page 30 :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+2 =$ ....
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+2x+1}{x^2-x-1} =$ ....
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} + \dfrac{1}{(x-1)^2} =$ ....
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-\sqrt{1-x}+1 =$ ....

   $=$ ....
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sqrt{x}}{(x-1)^2} =$ ....
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x} =$ ....

I.7 Exercice 4 page 30 :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} =$ ....
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3} =$ ....

- ....
  ....
  ....
  ....
  ....

I.8 Exercice 5 page 30 :

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3}=$ ....
  $=$ ....
- $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=$ ....
  $=$ ....
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-x^2-x-2}{x^2-3x-4}=$ ....
  $=$ ....

II Prolongement par continuité :

II.1 Activité 1 :

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$.
   (a) Quel est l'ensemble de continuité de f.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.
2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\begin{cases} g(x)=f(x) & \text{si } x\neq1 \\ g(1)=-1 \end{cases}$$

   (a) Montrer que g est continue en $x_0=1$.
   (b) Quel est alors l'ensemble de continuité de g.

Solution :
....
....
....
....
....
....

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en un réel x_0 de I.
Si f admet une limite finie ℓ en x_0 alors la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

g est appelée **prolongement par continuité** de f en x_0.

II.2 Exemple :

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$:

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

Montrer que f admet un prolongement par continuité en $x_0 = 0$ que l'on précisera.
Solution :

....

....

....

....

....

....

II.3 Exercice 7 page 30 :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III Limite est ordre :

III.1 Activité 1 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. (a) Quel est le signe de $f(x)$ si $x \leq 0$.
   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x) \geq 0$.
   (c) Quel est alors le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
2. Calculer et préciser le signe de chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en un réel x_0.
On suppose que : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

- ✓ Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\ell \geq 0$.
- ✓ Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\ell \leq 0$.

Conséquence

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut-être en $x_0 \in I$.

- ✓ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ et $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\boxed{\ell \leq \ell'}$.
- ✓ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$ et $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell}$.
- ✓ Si $|f(x)| \leq |g(x)| \quad \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0}$
- ✓ Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty}$
- ✓ Si $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty}$

Les résultats du conséquence reste vrai lorsque x tend vers x_0^+ ,x_0^- , $-\infty$ ou $+\infty$.

III.2 Exemple :

Soit la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{2-\cos x}{x}$$

1. (a) Montrer que pour tout $x>0$ on a : $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{x}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Solution :

III.3 Exercice 9 page 31 :

....

....

....

....

III.4 Exercice 10 page 31 :

....

....

....

....

....

IV Limite et continuité d'une fonction composée :

IV.1 Activité :

On donne les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 + \pi$ et $g(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

1. Déterminer $g\left(f(x)\right)$ et déduire $\lim\limits_{x \to 0} g\left(f(x)\right)$.
2. Déterminer les réels suivants : $\ell = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x \to \ell} g(x)$.

Solution :

....

....

....

....

....

....

Théorème

Soit f et g deux fonctions, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} g(x) = \ell'$ alors

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$$

IV.2 Exemple :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 + \dfrac{\sin 2x}{x}}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 - \cos x}{x^2} + \dfrac{x^2}{1 - \cos x} \right)$.

Solution :

....

....

....

....

....

....

....

....

IV.3 Activité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$.
Soit $x_0 \in I$ tel que f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$.
Montrer que $(g \circ f)$ est continue en x_0.
Solution :

....

....

....

....

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J tel que pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \in J$.
Si f est continue en un réel x_0 de I, et g est continue en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

Conséquence

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et continue en un réel x_0 de I , si de plus f est positive sur I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

IV.4 Exemple :

Déterminer les intervalles sur lesquelles f est continue dans chacune des cas suivants.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
3. $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$.

Solution :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

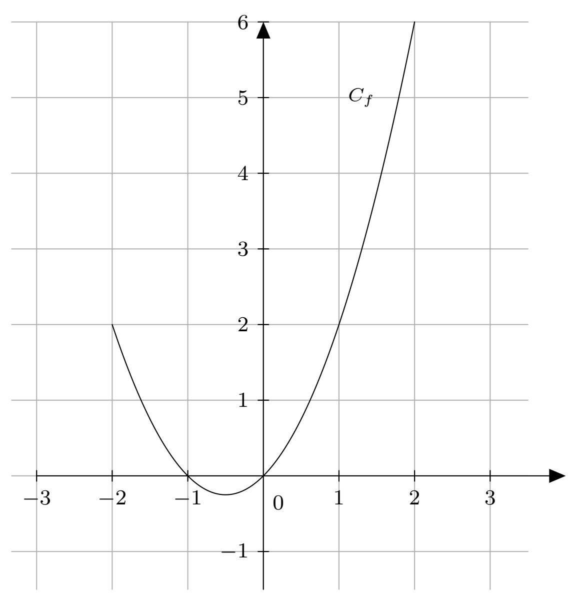
....

....

....

V Image d'un intervalle par une fonction continue :

V.1 Activité 3 page 20 :



....

....

....

....

....

....

....

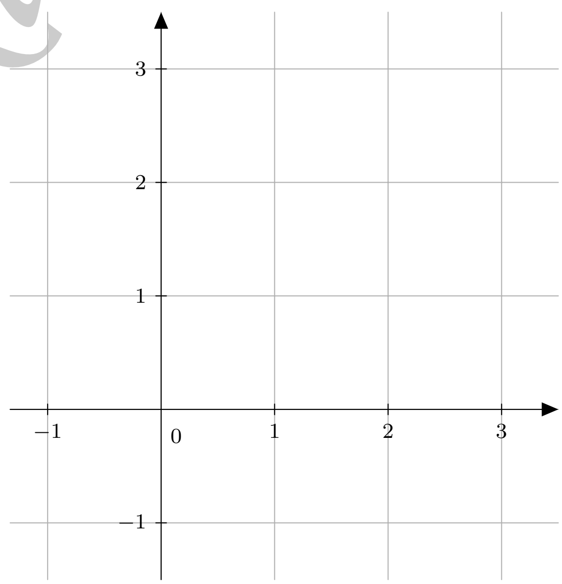
....

....

Théorème

* L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
* L'image d'un intervalle fermé borné $[a;b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m;M]$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f sur l'intervalle $[a;b]$.

V.2 Exercice 13 page 31 :



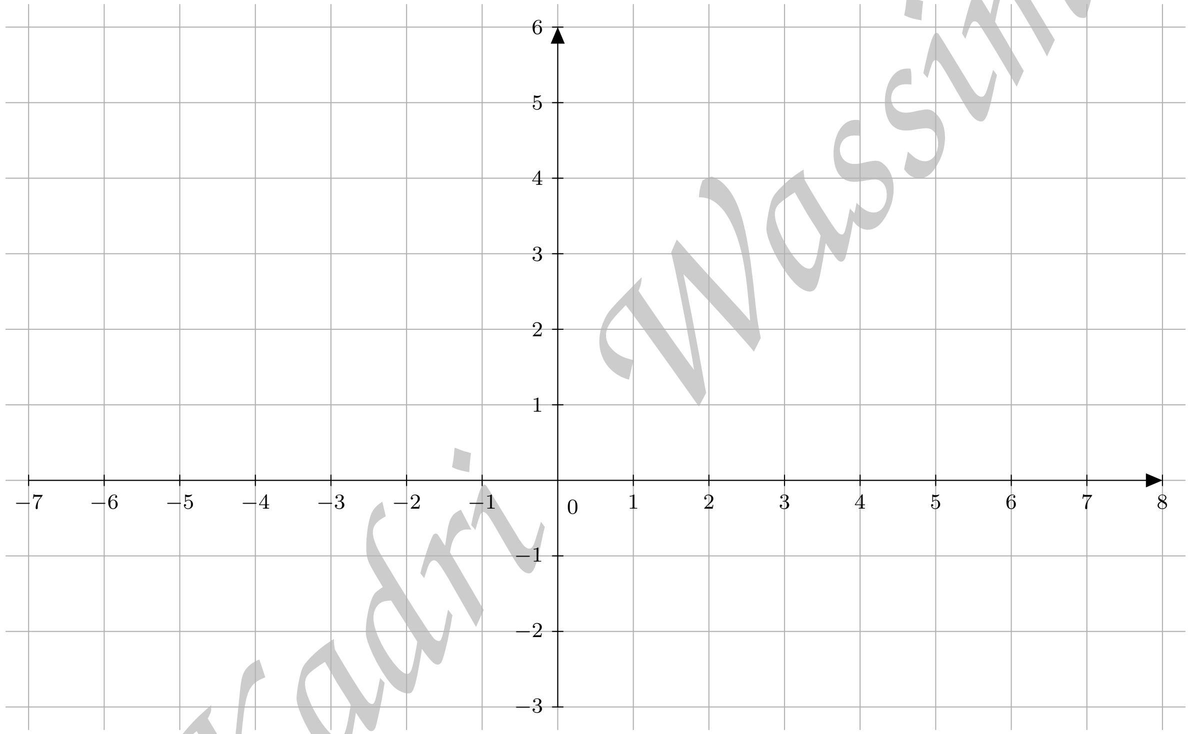
V.3 Activité :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = 1$ et $f(x) = 4$ dans l'intervalle $[-3; 2]$.
3. Soit k un réel compris entre $f(-3)$ et $f(-2)$ déterminer le nombre des solutions dans $[-3; 2]$ de l'équation $f(x) = k$

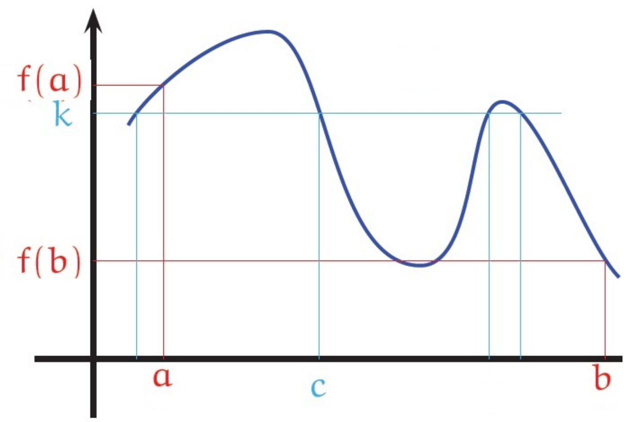
Solution :

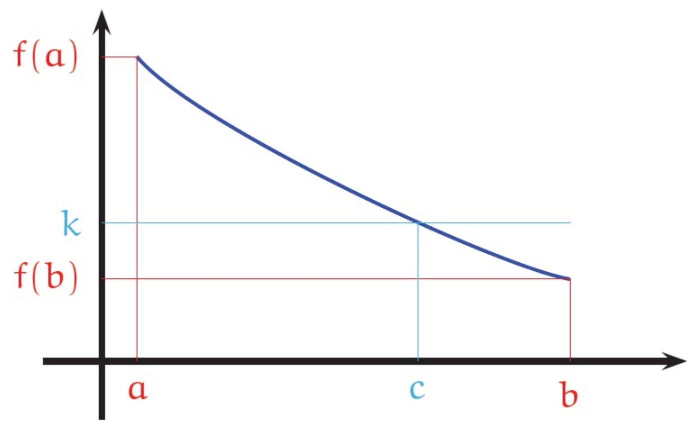


Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I) :

Soit f une fonction définie et <u>continue</u> sur un intervalle I.

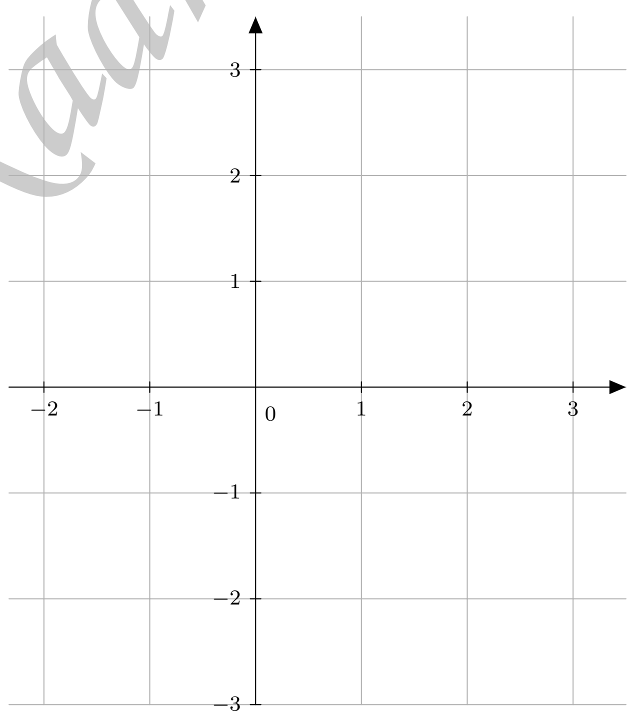
- ⋇ Soient a et b deux réels de I tel que $a < b$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède **au moins une solution** dans l'intervalle $[a, b]$.
- ⋇ Si de plus f est <u>strictement monotone</u> sur $[a, b]$ alors l'équation $f(x) = k$ admet **une unique solution** dans $[a, b]$.





Corollaire 1

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a \ , \ b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe <u>au moins</u> un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a \ , \ b[$ tel que $f(c) = 0$.



V.4 Exemple :

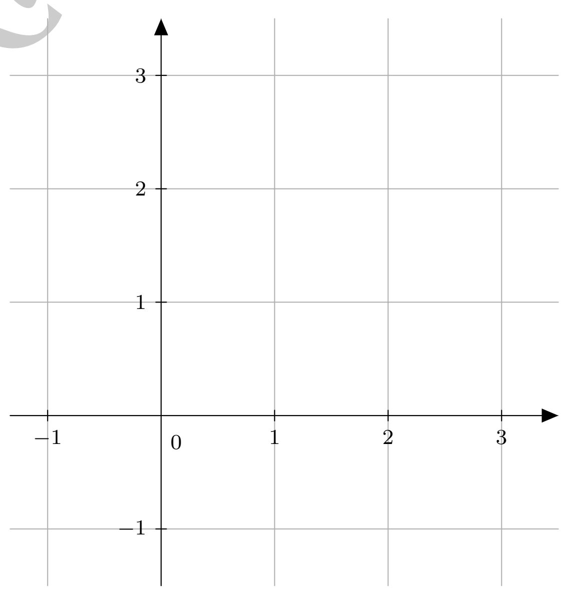
Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 - x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]-2, -1[$.
2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.(on utilise la **dichotomie**)

Solution :

Corollaire 2

Si f une fonction continue **strictement monotonne** sur un intervalle $[a\ ,\ b]$ et vérifiant $f(a).f(b) < 0$ alors il existe un unique réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a\ ,\ b[$ tel que $f(c) = 0$.



Corollaire 3

Si f est une fonction continue sur un intervalle et <u>ne s'annule en aucun réel</u> de cet intervalle alors elle garde un signe constant sur cet intervalle.

VI Limites et comportement asymptotique :

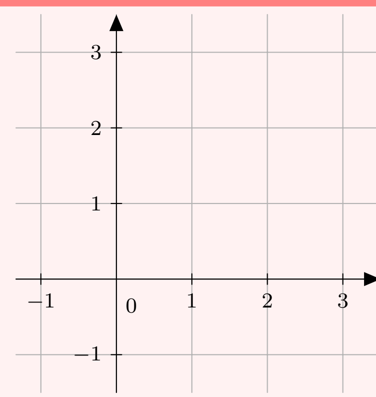
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. $M(x, y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$. On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une <u>*branche infinie*</u> si x ou y tend vers l'infini.

VI.1 Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La droite d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$



Exemple :

....

....

....

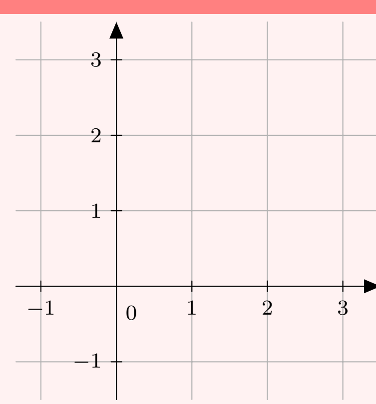
....

VI.2 Asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La droite d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$



Remarque :

Le signe de $f(x) - b$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple :

....

....

....

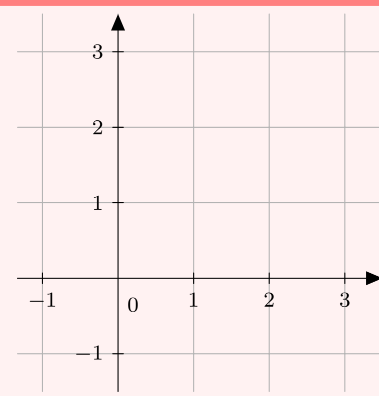
....

VI.3 Asymptote oblique :

Retenons

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
La droite d'équation $y = ax + b$ $(b \in \mathbb{R})$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ si et seulement si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



Remarque :

Le signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VI.4 Etude d'une branche infinie :

Dans le cas où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Dans ce qui suit le procédé qu'il faut suivre pour déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec $(a \neq 0)$, alors deux cas peuvent se présenter :
  - ✓ Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$ avec $(b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
  - ✓ Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque :

Dans le cas où $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$, l'étude de la branche infinie se fait de la même façon.