

Cours Chapitre 1 : Nombres complexes

Forme cartésienne (algébrique) :

Définition :

La forme algébrique d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est : $z = a + ib$ avec a et b sont deux réels et $i^2 = -1$.

a est la partie réelle de z , notée $Re(z)$, et b est la partie imaginaire de z , notée $Im(z)$.

Les réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle : $Im(z) = 0$.

Les imaginaires purs sont les nombres complexes dont la partie réelle est nulle : $Re(z) = 0$.

Deux nombres complexes z et z' sont égaux, si et seulement si, $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$. En particulier $z = 0$, si et seulement si, $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

Opération dans \mathbb{C} :

✚ **Addition des complexes** : Pour tous réels : a, b, a' et b'

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

✚ **Multiplication des complexes** : Pour tous réels a, b, a' et b' ,

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

✚ **Inverse d'un complexe non nul** : Pour tous réels a et b tels que $a^2 + b^2 \neq 0$,

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Conjugué d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib = Re(z) - i Im(z)$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z) = a, \frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z) = b, z * \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 = a^2 + b^2$$

z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$, z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

$$\bar{\bar{z}} = z$$

Pour tous nombres complexes z et z' : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z * z'} = \bar{z} * \bar{z}'$

Pour tous nombres complexes z et z' et $n \in \mathbb{N}$: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Pour tout nombre complexe non nul z' : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Module d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle module de z le réel positif noté $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{z * \bar{z}}$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' et $n \in \mathbb{N}$:

$$z * \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 ; |kz| = |k| * |z| \text{ avec } k \in \mathbb{Z}^*.$$

$$|z * z'| = |z| * |z'| ; |z^n| = |z|^n$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| ; \operatorname{Re}(z) \leq |z| ; \operatorname{Im}(z) \leq |z|.$$

Pour tout nombre complexe non nul z' : $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|} ; \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} ; \frac{1}{z'} = \frac{\bar{z}'}{|z'|^2}$

Représentation graphique d'un nombre complexe :

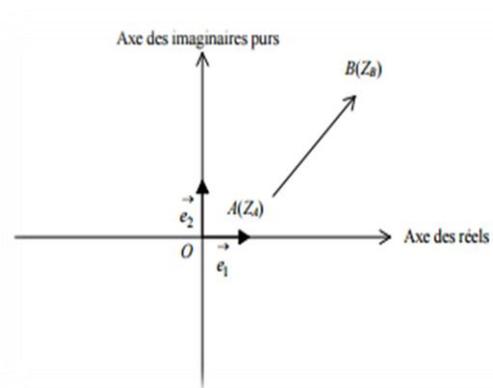
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé l'unique point $M(a, b)$. On dit alors que z est l'afixe de M . on note z_M .

(o, \vec{e}_1) est l'axe réel, (o, \vec{e}_2) est l'axe imaginaire.

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Les points d'affixes z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe réel.



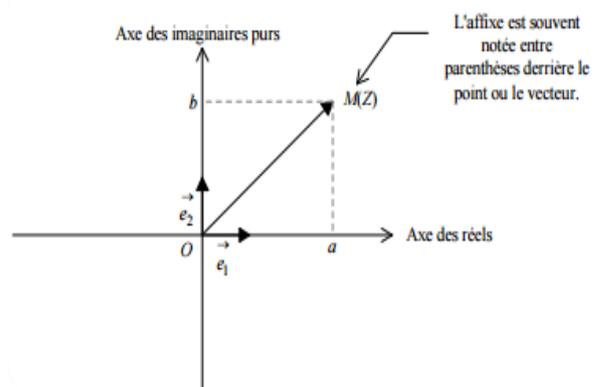
Soient A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a :

$$\operatorname{Aff}(\vec{AB}) = z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

$$\text{et } AB = |z_B - z_A|$$

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteur du plan complexe et α, β deux réels on a :

$$\operatorname{Aff}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \operatorname{Aff}(\vec{u}) + \beta \operatorname{Aff}(\vec{v})$$



Forme trigonométrique:

Argument d'un nombre complexe non nul :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nul. Une mesure de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta$ est dite un argument de z noté $\arg z$ et on écrit $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.

$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$ est dite forme trigonométrique du nombre complexe z .

$Re(z) = r \cos\theta$ et $Im(z) = r \sin\theta$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$$

z est imaginaire signifie $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Propriétés:

Pour tous z et z' complexes non nul et $n \in \mathbb{N}$:

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi] ; \arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi] ; \arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ si } k \in \mathbb{Z}_+^*$$

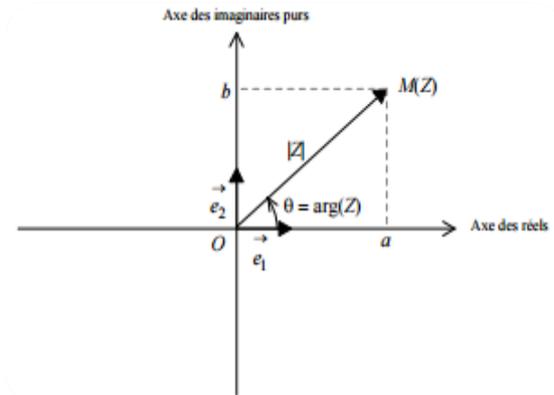
$$\arg(kz) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi] \text{ si } k \in \mathbb{Z}_-^* ; \arg(z * z') = \arg(z) + \arg(z') ;$$

$$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') [2\pi] ; \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi] ; \arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi].$$

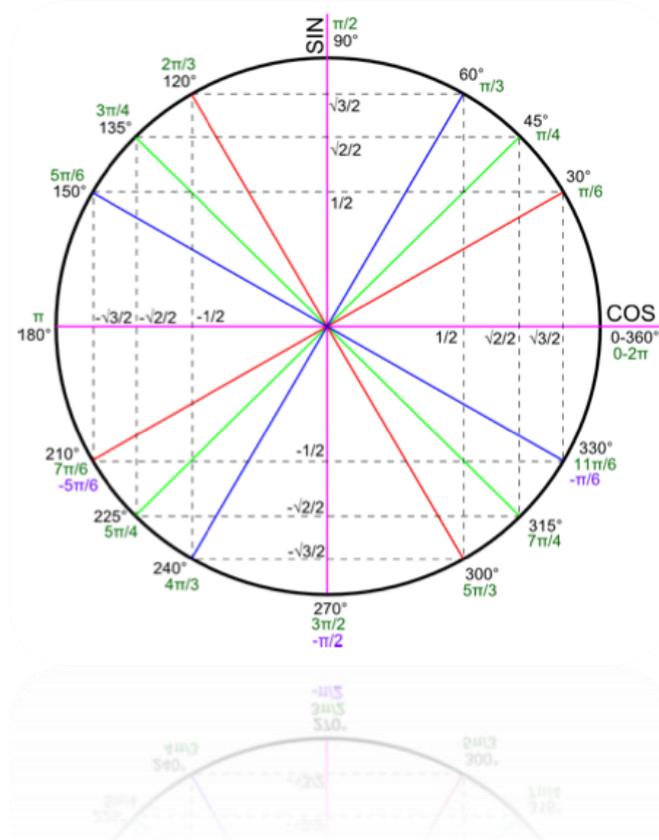
$$z = z' \text{ équivaut } \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

Cercle trigonométrique:

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



On appelle cercle trigonométrique, un cercle orienté de rayon 1. Par convention, on choisit le sens inverse des aiguilles d'une montre comme sens direct ou sens positif.



Forme exponentielle :

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\arg z \equiv \theta [2\pi]$.

L'écriture $\mathbf{z} = |\mathbf{z}|e^{i\theta} = \mathbf{r}e^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle du nombre complexe z .

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta ; e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{les formules d'Euler}).$$

Propriétés :

Pour tous θ et θ' réels, k et n entiers on a :

$$e^{i0} = 1 ; e^{i\frac{\pi}{2}} = i ; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i ; e^{i\pi} = -1$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} ; e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta} ; e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} ; e^{-i\theta'} = \frac{1}{e^{i\theta'}} ; e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) : \text{formule de Moivre.}$$

Vision géométrique : (alignement , orthogonalité)

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. On a :

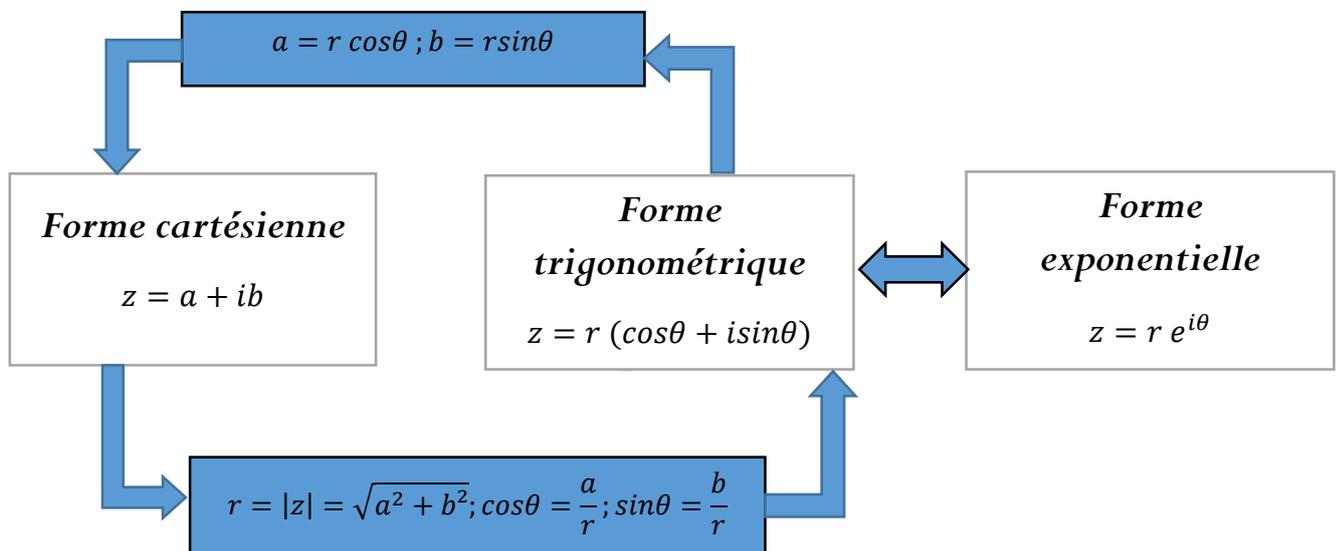
$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A ; AB = |z_B - z_A| ; (\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi].$$

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} deux vecteurs non nuls sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel.

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

Résumé:



Pour aller plus loin: Pour trouver les ensembles cherchés :

- ✚ $MA = MB \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.
- ✚ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privé de A et B .
- ✚ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow M \in]AB[$.
- ✚ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .