

1) Définition :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle

On appelle fonction **logarithme népérien** qu'on note **ln** la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. $\left(\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \right)$.

Conséquences :

- La fonction ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$.

2) Premières propriétés de la fonction ln :

On a, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$. Donc ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. La fonction ln étant dérivable donc continue, et strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , est donc une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\ln]0, +\infty[= \mathbb{R}$.

Conséquences :

- 1 a un unique antécédent par ln noté e : $\ln(e) = 1$.
- Pour tous réels strictement positifs a et b, on a : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$ et pour $x < 1$, on a $\ln x < 0$.

Exercice 1 :

Résoudre $\ln(4 - x) > 0$.

Propriété :

Si u est une fonction strictement positif et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de f et calculer sa dérivée

$$f(x) = \ln(x+3) ; f(x) = \ln(x)+3 ; f(x) = \ln(x^2+1) ; f(x) = x + \ln(x^2) ; f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

3) Relations importantes :**Exercice 3 :**

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$.

- 1) Calculer $F'(x)$. En déduire que F est aussi une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Comment peut-on alors écrire F(x) ?

- 2) En calculant F(1) de deux manières, en déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

3) En utilisant la relation précédente, déterminer une relation entre $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ et $\ln(a)$.

4) Donner une relation entre $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, $\ln(a)$ et $\ln(b)$, pour tous réels strictement positifs a et b .

Propriétés : Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors :

$$1) \ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad 2) \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad 3) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$4) \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a \qquad 5) \ln(a^n) = n \ln a, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

$$6) \ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n, \text{ avec } a_1, a_2, \dots \text{ et } a_n \text{ sont des réels strictement positifs.}$$

Remarque : La fonction \ln transforme un produit en somme, un inverse en opposé et un quotient en différence.

Exercice 4 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \ln 2 + \ln 4 - \ln 8 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \ln(\sqrt{3}) \quad ; \quad \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{(x+1)^3}\right)$.

Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens variations de f .

4) Etude de la fonction \ln :

Propriété : La fonction \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. En effet, pour $x \geq 3^n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), $\ln x \geq n \cdot \ln 3$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. En effet, on a $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

Remarques :

- 1) La droite d'équation $x = 0$ (l'axe (Oy)) est une asymptote verticale quand x tend vers 0^+ .
- 2) Les valeurs approchées $\ln 2 \approx 0.7$ et $\ln 3 \approx 1.1$ sont à connaître.
- 3) La tangente à la courbe de la fonction \ln au point d'abscisse 1 est $T : y = x - 1$.

Tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln(x)$				
		0	1	$+\infty$
		$-\infty$		

Courbe représentative :



Quelques tangentes remarquables:

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = 1(x - 1) + \ln 1 = x - 1.$$

La tangente au point d'abscisse e a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + \ln e = \frac{1}{e}x - 1 + 1 = \frac{x}{e}. \text{ Cette tangente passe par l'origine du repère.}$$

Exercice 6

1) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln x \leq \sqrt{x}$. (on pourra étudier la fonction $h(x) = \ln x - \sqrt{x}$).

2) En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Propriétés :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Exercice 7 Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\ln x \geq 1 ; \ln x = 2 ; \ln x \leq 1 ; 3 - \ln x \leq 8 ; \ln(2x+1) = 1$$

$$\ln(x^2) = -1 ; \ln(x(x+1)) = 0 ; \ln x + \ln(x+1) = 0$$

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - \ln x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{3 + 2x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x}$$

Exercice 9 Soit la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire les asymptotes à ζ_f .

2) Dresser le tableau des variations de f .

3) Tracer ζ_f ainsi que sa tangente au point d'abscisse e .



Théorème : Pour tout entiers non nuls n et m , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^m (\ln x)^n = 0.$$

Propriétés :

1) Si u est une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable

$$\text{sur } I \text{ et on a } \left(\ln(|u(x)|) \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ pour tout } x \in I.$$

2) Toute fonction dérivable de la forme $\frac{1}{u}$ a pour primitive $\ln(|u|)$ sur tout intervalle où u ne s'annule pas.

Exercice 10 : Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives et donner une primitive de f :

$$f(x) = \frac{2}{2x-3}, \quad f(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

5) Fonction logarithme décimal :

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln 10}$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(10)$.

2) Montrer que, pour tout réels strictement positifs a et b et pour tout entier relatif n , on a :

$$f(a.b) = f(a) + f(b) ; f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b) ; f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) ; f(a^n) = n.f(a).$$

Cette fonction est appelée fonction logarithme décimal, qu'on note \log .

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$.

4) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variations.

5) Tracer la courbe représentative de f .