Comment déterminer un ensemble de points à partir de la forme algébrique ?

Méthode : Il faut savoir « traduire l'énoncé », les remarques suivantes sont souvent utiles pour le faire :

- z est un nombre réel signifie que $Im(z) = 0$ ou que $z = \bar{z}$ ou que l'image de z est un point de l'axe réel (on l'interprètera aussi plus loin à l'aide de l'argument)
- z est un nombre imaginaire signifie que $Re(z) = 0$ ou que $z = -\bar{z}$ ou que l'image de z appartient à l'axe imaginaire.(interprétation aussi avec l'argument, voir plus loin)

Il faut aussi savoir reconnaître les ensembles de points à partir de leur équation :

- $ax + by + c = 0$ pour une droite
- $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ pour le cercle de centre le point Ω d'affixe $(x_\Omega + iy_\Omega)$ et de rayon R.

Exemples : A tout nombre complexe z différent de $-2i$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$. On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

1) Exprimer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de Z.
2) En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan complexe, d'affixe z tels que Z est réel.
3) En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan complexe, d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

	Que faut-il faire ?	**Quelle forme faut-il choisir ?**
Forme algébrique	$a + ib$ vérifier que a et b sont réels.	Cette forme facilite les calculs de somme et de différence et permet de faire le lien entre les complexes et les coordonnées cartésiennes des points images.
Forme trigonométrique	$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ vérifier que r est un réel positif.	Cette forme établit le lien entre les complexes et la géométrie, elle permet le calcul des distances et des angles.
Forme exponentielle	$re^{i\theta}$ vérifier que r est positif	Cette forme facilite les calculs de produit,de quotient et de puissance de nombres complexes.

Pour passer d'une forme à l'autre :

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

Forme algébrique

$z = x + iy$

Forme trigonométrique

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forme exponentielle

$z = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,;\cos\theta = \frac{x}{r}\,;\sin\theta = \frac{y}{r}$

Exemple : Relier les nombres complexes proposés à leurs différentes formes :

Complexes	Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$(1+i)^3$	$-2-2i$	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
$-2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right))$	$2+2i$	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
$\frac{8+4i}{3-i}$	-2+2i	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- Cas particuliers à bien savoir : $e^{i\times 0} = 1$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{i\pi} = -1$ $e^{i\frac{-\pi}{2}} = -i$

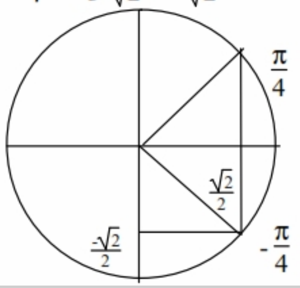
Comment calculer module et argument ?

Exemple : z = $3 - 3\,i$.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\,\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.   On peut dire $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{4}$ à 2π près.

$\sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ NEGATIF   donc $\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$

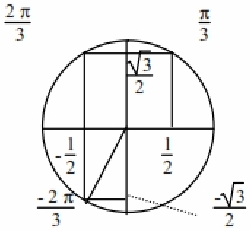


donc $z = [\,3\sqrt{2}\,, \frac{-\pi}{4}\,] = 3\,\sqrt{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Comment passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique ?

$\rho\, e^{i\theta} = [\,\rho\,,\theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\cos\theta + i\,\rho\sin\theta$

exemple $2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$



Comment utiliser la forme trigonométrique des nombres complexes en géométrie ?

Méthode : Pour utiliser les nombres complexes en géométrie, il est utile de connaître leur forme trigonométrique, les règles de calcul sur celle-ci et l'interprétation géométrique des modules et arguments suivants :

$|z_B - z_A| = AB$; $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$; $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$; $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ (2π)

Dans ce qui précède A, B et C sont trois points tels que A≠B et A≠C

Exemples : 1) Soit $z_1 = -\sqrt{3} + i$ $z_2 = -2i$ $z_3 = \sqrt{3} + i$ les affixes respectives de trois points A, B et C.

Déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$. En déduire la nature du triangle ABC.

Comment multiplier deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $(3 + 4\,i)(5 - 2\,i) = 15 - 6\,i + 20\,i - 8\,i^2 = 15 + 14\,i + 8 = 23 + 14\,i$

$5\,e^{i\frac{\pi}{12}} \times 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 10\,e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})} = 10\,e^{i\frac{p}{4}}$ $(= 10(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 10\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\,i$.

Comment diviser deux nombres complexes ?

On peut utiliser les deux formes , mais si on a la forme trigonométrique, les calculs seront plus simples.

Exemple : $\frac{(3 + 4\,i)}{(5 - 2\,i)} = \frac{(3 + 4\,i)(5 + 2\,i)}{(5 - 2\,i)(5 + 2\,i)} = \frac{15 + 6\,i + 20\,i + 8\,i^2}{25 - 4\,i^2} = \frac{15 + 26\,i - 8}{25 + 4} = \frac{7 + 26\,i}{29} = \frac{7}{29} + \frac{26}{29}\,i$.

Exemple $\frac{5\,e^{i\frac{\pi}{12}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{5}{2}\,e^{i(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6})} = 2{,}5\;e^{-i\frac{\pi}{12}}$

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-5+3i|=9$.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+7-2i|=|z+5-i|$

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-5i|=2|z+1-3i|$

Méthode : Pour trouver les ensembles cherchés on utilise en général les caractérisations suivantes :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ *ou* $\arg(z)=0\ (\pi)$
- $z \in \mathbb{R}$ *et* $z>0 \Leftrightarrow \arg(z)=0\ (2\pi)$
- $z \in \mathbb{R}$ *et* $z<0 \Leftrightarrow \arg(z)=\pi\ (2\pi)$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z=0$ *ou* $\arg(z)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$
- $z \in i\mathbb{R}$ *et* $Im(z)>0 \Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $z \in i\mathbb{R}$ *et* $Im(z)<0 \Leftrightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $MA=MB \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de $[AB]$
- $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=0\ (\pi) \Leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privée de A *et* B
- $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\pi\ (2\pi) \Leftrightarrow M \in]AB[$
- $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé de A *et* B.
- $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})=\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Leftrightarrow M$ appartient à l'un des demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A *et* B, on précise lequel en citant par exemple un de ses points .

Exemple : On désigne par A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$. A tout point M d'affixe z, M distinct de A, on associe le point M' d'affixe Z telle que $Z=i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble des points M dont les images M' appartiennent à l'axe imaginaire.
2) Déterminer l'ensemble des points M dont les images M' appartiennent à l'axe réel.
3) Déterminer l'ensemble des points M dont les images M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Comment préciser la position relative de trois points ?

Méthode : Dans le plan complexe, z_A, z_B et z_C sont trois nombres complexes distincts, d'images respectives A, B et C. On considère le nombre complexe $Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. On a :

- $|Z|=1 \Leftrightarrow AB=AC$
- $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B$ *et* C alignés
- $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB)\perp(AC)$
- $Z=\pm i \Leftrightarrow ABC$ est rectangle et isocèle en A
- $Z=e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow ABC$ est un triangle équilatéral

Exemple : Dans chacun des cas que peut-on dire des points A, B et C ?

1) $z_A=2+i$; $z_B=1+i$; $z_C=2+2i$

2) $z_A=2+i$; $z_B=1+i$; $z_C=1-i$

3) $z_A=-1-2i$; $z_B=-10-8i$; $z_C=2$

4) $z_A=-1+i\sqrt{3}$; $z_B=-1-i\sqrt{3}$; $z_C=2$

Comment résoudre une équation du second degré ?

exemple $3z^2 + 4z + 1 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times 1 = 16 - 12 = 4$ $\qquad\Delta > 0$ donc 2 solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$\boxed{S = \{-\frac{1}{3} ; -1\}}$$

exemple $-3z^2 + 4z - 2 = 0.$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 16 - 24 = -8$ $\qquad\Delta < 0$ donc 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4 + i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2 + i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}$$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 - i\sqrt{8}}{2(-3)} = \frac{-4 - i \times 2\sqrt{2}}{-6} = \frac{-2 - i\sqrt{2}}{-3} = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{S = \{\frac{2 - i\sqrt{2}}{3} ; \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}\}}$$

À RETENIR : dans $\mathbb{C}$, on peut toujours obtenir la factorisation suivante :

$$\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$$ où z_1 et z_2 sont les racines du polynôme $az^2 + bz + c$

résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

On écrit $z = x + \mathbf{i}y$, ainsi : $x^2 + 2xy\mathbf{i} - y^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

Et avec la condition sur les modules ($|z|^2 = 5$), on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent : $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$

Or, d'après la troisième condition $xy = 2$, les réels x et y sont de même signe. On obtient donc :

$$z_1 = 2 + \mathbf{i} \;;\; z_2 = -2 - \mathbf{i}$$

résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(1 + \mathbf{i})z^2 + \mathbf{i}z - 1 = 0$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 4(1 + \mathbf{i})(-1) = -1 + 4(1 + \mathbf{i}) = 3 + 4\mathbf{i}$$

On cherche un complexe δ tel que : $\delta^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

D'après l'exemple précédent, $\delta = 2 + \mathbf{i}$ convient. On en déduit nos deux solutions :

$$z_1 = \frac{-\mathbf{i} - (2 + \mathbf{i})}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{-2 - 2\mathbf{i}}{2(1 + \mathbf{i})} = -1 \;;\; z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-\mathbf{i} + (2 + \mathbf{i})}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{2}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

Remarque : on pouvait voir dès le début la racine évidente $z_1 = -1$ et en déduire z_2 avec la relation $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Résoudre l'équation $(7-6i)z^2 - 2(7-6i)z - 85 = 0$.

Corrigé

$(7-6i)z^2 - 2(7-6i)z - 85 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - \dfrac{85}{7-6i} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - (7+6i) = 0.$

$\Delta' = 8 + 6i = (3+i)^2$ car $\begin{cases} X^2 - Y^2 = 8 \\ 2XY = 6 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{64+36} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = 9 \\ Y^2 = 1 \\ XY > 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} z_1 = 1 + (3+i) = 4 + i \\ z_2 = 1 - (3+i) = -2 - i \end{cases}$

Résoudre $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$
sachant qu'il existe une racine imaginaire pure.

Résoudre $z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$

Posons $z = ai$.
(E) s'écrit $(5a^2 - 16a + 3) + i(-a^3 + 3a^2 + 7a - 21) = 0$
La partie réelle s'annule pour $a \in \{3, \frac{1}{5}\}$ et seul 3 annule la partie imaginaire
donc le polynôme est divisible par $z - 3i$ et l'équation s'écrit $(z-3i)(z^2 - 5z + 7 + i) = 0$
$\Delta = 25 - 4(7+i) = -3 - 4i = (1-2i)^2$

$S = \{3i, 2+i, 3-i\}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \sqrt{3}z - 5 + 3\sqrt{3}i = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré. $\Delta = 3 - 4(-5 + 3\sqrt{3}i) = 23 - 12i\sqrt{3}$.

$(x+iy)^2 = 23 - 12i\sqrt{3} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 23 \\ 2xy = -12\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 31 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 27 \\ xy < 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}$

On en déduit $\Delta = (\sqrt{27} - 2i)^2 = (3\sqrt{3} - 2i)^2$.
Les solutions de l'équation sont donc $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = -2\sqrt{3} + i$.