

### Définition :

Il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$ , appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$  contient l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- Tout nombre complexe  $z$  s'écrit de manière unique :  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  sont des réels.

L'écriture  $z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe  $z$ .  $a$  est **la partie réelle** de  $z$ , notée  $Re(z)$ .  $b$  est **la partie imaginaire** de  $z$  notée  $Im(z)$ .

### Remarque :

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

- Si  $b = 0$ ,  $z$  est réel.
- Si  $a = 0$ ,  $z$  est dit **imaginaire pur**.

### Conséquences :

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

- $z$  est réel ssi  $Im(z) = 0$ .
- $z$  est imaginaire pur ssi  $Re(z) = 0$ .
- $z = 0$  ssi  $Im(z) = Re(z) = 0$ .
- $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$  et  $Im(z) = Im(z')$ .

### Définition :

Le plan est muni d'un ROND  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . Soit  $M(a, b)$  un point du plan.

- On appelle **affiche** de  $M$ , le nombre complexe noté  $aff(M)$  ou  $z_M$  tel que :

$aff(M) = a + ib$ . Le nombre complexe  $a + ib$  est dit aussi l'affiche du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , on le note  $aff(\overrightarrow{OM})$  ou  $z_{\overrightarrow{OM}}$ .

- $M(a, b)$  est le **point image** du nombre complexe  $z = a + ib$ .



### Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs.

$$1) \text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_{\overline{AB}} = z_B - z_A$$

$$2) \text{aff}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha \text{aff}(\vec{u}) + \beta \text{aff}(\vec{v}) \text{ pour tous réels } \alpha \text{ et } \beta.$$

### Définition : "Conjugué d'un nombre complexe"

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de  $z$  et on note  $\bar{z}$ , le nombre complexe défini par  $\bar{z} = a - ib$ .

### Propriétés :

Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

$$1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$5) z + \bar{z} = 2a$$

$$2) \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$6) z - \bar{z} = 2ib$$

$$3) \overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$7) z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$4) \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0$$

### Théorème :

Soit  $z$  un nombre complexe.

$$- z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$- z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

### Définition : "Module d'un nombre complexe"

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de  $z$  et on note  $|z|$ , le réel positif défini par  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

### Propriétés :

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

$$1) |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$4) |z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$2) |\bar{z}| = |z|$$

$$5) \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$$

$$3) |-z| = |z|$$

$$6) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

### Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ .

$$\text{Alors : } AB = |z_B - z_A|$$



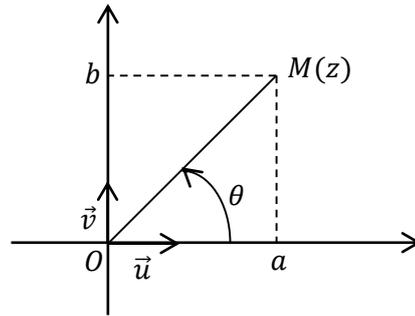
## Définition : "Argument d'un nombre complexe"

Le plan est muni d'un ROND  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

$z = a + ib$  ( $a$  et  $b$  sont des réels) est un nombre complexe non nul d'image  $M$ .

On appelle **argument** de  $z$  et on note  $\arg(z)$ , toute mesure, en radian, de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ .

$$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



## Propriétés :

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls.

- 1)  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 2)  $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 3)  $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 4)  $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$
- 5)  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- 6)  $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## Théorème :

Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'écriture algébrique  $z = a + ib$  et  $\theta$  un argument de  $z$ . Alors :  $a = |z| \cos \theta$  et  $b = |z| \sin \theta$  ou encore :  $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$  et  $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$

$$\text{On a alors : } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

## Définition : "Forme trigonométrique d'un nombre complexe"

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

L'écriture de  $z$  sous la forme  $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  ou  $[|z|, \theta]$  où  $\theta$  désigne un argument de  $z$  est appelée écriture **trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de  $z$ .

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = [|z|, \theta]$$

$|z|$  et  $\theta$  sont les **coordonnées polaires** du point  $M(z)$ .

## Propriétés :

Soient  $z = [r, \theta]$  et  $z' = [r', \theta']$  deux nombres complexes non nuls avec  $r \in \mathbb{R}_+, r' \in \mathbb{R}_+, \theta \in \mathbb{R}$  et  $\theta' \in \mathbb{R}$ .

- 1)  $\bar{z} = [r, -\theta]$
- 2)  $z \cdot z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$
- 3)  $z^n = [r^n, n\theta]$
- 4)  $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
- 5)  $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$



### Définition : "Forme exponentielle d'un nombre complexe"

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ .

Soit  $z = [r, \theta]$  un nombre complexe non nul. L'écriture  $z = r e^{i\theta}$  est la **forme exponentielle** de  $z$ .

### Propriétés :

Soient  $z = r e^{i\theta}$  et  $z' = r' e^{i\theta'}$  deux nombres complexes non nuls avec  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $r' \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\theta' \in \mathbb{R}$ .

$$1) \bar{z} = r e^{-i\theta}$$

$$4) \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

$$2) z \cdot z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$5) \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$3) z^n = r^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

### Formules d'Euler :

Pour tout réel  $\theta$  on a :  $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos \theta$  et  $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$

### Formule de Moivre :

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

### Propriétés :

Le plan est muni d'un ROND  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs d'affixes respectives  $z_{\vec{u}}$  et  $z_{\vec{v}}$ .

$$1) (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, si  $A, B, C$  et  $D$  sont quatre d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ ,

$$\text{alors : } (\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \text{ est réel.}$$

$$3) \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} \text{ est imaginaire pur.}$$

### Définition : "Racine carrée d'un nombre complexe"

Soit  $Z$  un nombre complexe.

On appelle **racine carrée** de  $Z$  tout nombre complexe  $z$  vérifiant :  $z^2 = Z$ .

### Théorème :

$Z = a + ib$  et  $z = x + iy$  sont deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$



### Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Il est interdit d'utiliser la notation  $\sqrt{\quad}$  pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe, car il ne s'agit pas d'une fonction sur  $\mathbb{C}$ .

### Théorème :

Soit  $Z = re^{i\theta}$  un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

Les racines carrées de  $Z$  sont :  $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$  et  $z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

### Définition : "Equation du second degré à coefficients complexes"

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres complexes donnés tels que  $a \neq 0$ .

L'équation :  $az^2 + bz + c = 0$  s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

### Théorème :

Soit  $(E)$ :  $az^2 + bz + c = 0$  une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Appelé le discriminant de l'équation  $(E)$ .

1) Si  $\Delta = 0$ , alors  $(E)$  admet dans  $\mathbb{C}$  une solution double :  $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$

2) Si  $\Delta \neq 0$ , alors  $(E)$  admet dans  $\mathbb{C}$  deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ avec } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

3) Si  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de  $(E)$ , alors :  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

### Théorème :

Soit  $(E)$ :  $az^2 + 2b'z + c = 0$  une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose  $\Delta' = b'^2 - ac$ . Appelé le discriminant réduit de l'équation  $(E)$ .

1) Si  $\Delta' = 0$ , alors  $(E)$  admet dans  $\mathbb{C}$  une solution double :  $z_1 = z_2 = \frac{-b'}{a}$

2) Si  $\Delta' \neq 0$ , alors  $(E)$  admet dans  $\mathbb{C}$  deux solutions distinctes :

$$z_1 = \frac{-b'-\delta'}{a} \text{ et } z_2 = \frac{-b'+\delta'}{a} \text{ avec } \delta' \text{ est une racine carrée de } \Delta'.$$

3) Si  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de  $(E)$ , alors :  $az^2 + 2bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

### Théorème :

Soit  $(E)$ :  $az^2 + bz + c = 0$  une équation du second degré à coefficients complexes.

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de  $(E)$ , alors : 
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$



### Théorème :

Soient  $S$  et  $P$  deux nombres complexes donnés.

Les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \cdot z_2 = P \end{cases}$  sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation :  $z^2 - Sz + P = 0$ .

### Définition : "Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe"

Soient  $Z \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On appelle **racine  $n^{\text{ième}}$**  de  $Z$ , tout nombre complexe  $z$  vérifiant :  $z^n = Z$ .

Si  $Z = 1$ , alors on dit que  $z$  est une **racine  $n^{\text{ième}}$  de l'unité**.

### Théorème :

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Z = re^{i\theta}$  un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

– Les  $n$  racines  $n^{\text{ièmes}}$  de  $Z$  (les solutions de l'équation  $z^n = Z$ ) sont les nombres complexes :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

– Les images  $M_k$  des nombres complexes  $z_k$  sont les sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés inscrits dans le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt[n]{r}$ .

Les points images des solutions de l'équation  $z^6 = Z$

