

| | |
|--|--|
| République Tunisienne Ministère de l'éducation ◇◇◇ Lycée secondaire : <i>Ibn Khaldoun</i> | Professeur : <i>Benjeddou Saber</i> |
| | Résumé : <i>Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte</i> |
| Année scolaire : <i>2016/2017</i> | Niveau : <i>Bac sciences techniques</i> |

Définition : "Produit scalaire"

Soit A, B et C trois points de l'espace.
 Le produit scalaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} est le réel défini par :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ si $\vec{AB} = \vec{0}$ ou $\vec{AC} = \vec{0}$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{AB, AC})$ si \vec{AB} et \vec{AC} sont non nuls.

$\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$ où $\|\vec{AB}\|$ désigne la norme du vecteur \vec{AB} .

Propriétés :

Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de l'espace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Théorème :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Théorème : "Expression analytique du produit scalaire"


Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un RON de l'espace ξ .

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Définition : "Vecteurs normal à un plan"

Un vecteur normal \vec{n} à un plan P est un vecteur directeur d'une droite D quelconque perpendiculaire à ce plan.



Théorème :

Soit \vec{n} un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Théorème :

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P .

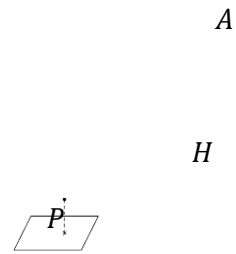
Théorème : "Distance d'un point à un plan"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur P .

La distance de A à P est le réel positif AH noté $d(A, P)$ et tel que :

$$AH = d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Théorème :

Soit P et Q deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n} et \vec{m} , D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} .

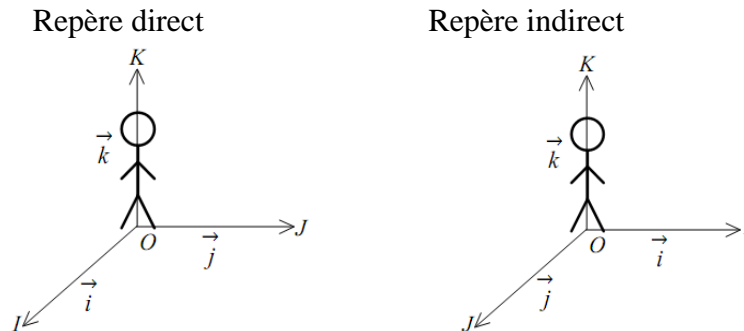
| | | |
|--|---|---|
| $P // Q \Leftrightarrow \vec{n}$ et \vec{m} sont colinéaires | $D // D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires | $D \perp P \Leftrightarrow \vec{n}$ et \vec{u} sont colinéaires |
| $P \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{m}$ | $D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ | $D // P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ |

Définition : "Orientation de l'espace"

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe (O, \vec{k}) , les pieds en O et regardant le point I .

Si l'observateur a le point J à sa gauche, le repère est dit direct. Il est dit indirect dans le cas contraire.

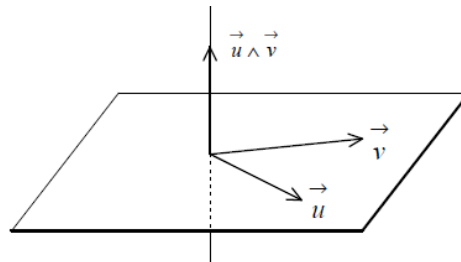


Définition : "Produit vectoriel"

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} , l'unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si non, alors :

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \end{array} \right.$



Propriétés :

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} de l'espace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\alpha \vec{u}) \wedge (\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Propriété :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de l'espace.

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs directeurs d'un plan P , alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à P .



Théorème : "Expression analytique du produit vectoriel"

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un ROND de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$

Théorème : "Cosinus et sinus de l'angle de deux vecteurs"

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace orienté. Alors :

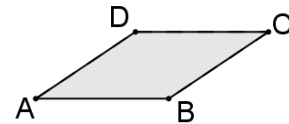
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Théorème : "Aire d'un parallélogramme – Aire d'un triangle"

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un RON de l'espace et $ABCD$ un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$

En particulier, l'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$



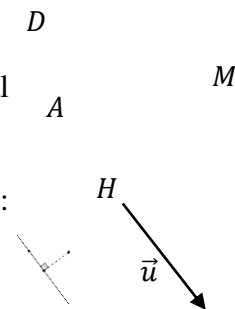
Théorème : "Distance d'un point à une droite"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $D(A, \vec{u})$.

La distance de M à $D(A, \vec{u})$ est le réel positif MH noté $d(M, D)$ et tel que :

$$MH = d(M, D) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



Définition : "Produit mixte"

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.

On appelle produit mixte des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , noté $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le réel : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Propriétés :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

1) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

2) \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$



Propriété :

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormée.

- 1) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 1$
- 2) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est indirecte $\Leftrightarrow (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = -1$

Théorème : "Volume d'un parallélépipède"

L'espace est muni d'un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède et V son volume. Alors :

$$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$
$$= |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})|$$



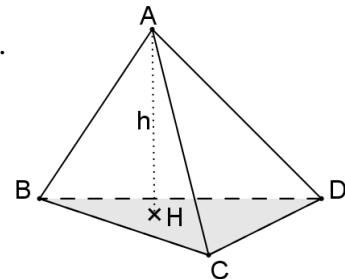
Théorème : "Volume d'un tétraèdre"

L'espace est muni d'un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $ABCD$ un tétraèdre, V son volume et h la hauteur issue de A .

Alors :

- 1) $V = \frac{1}{3} \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$
$$= \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$
- 2) $h = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|}$



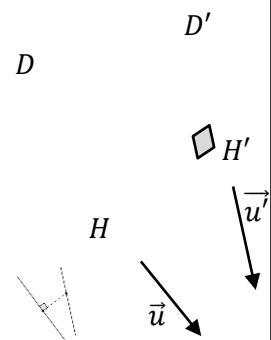
Théorème : "Distance de deux droites"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $D(A, \vec{u})$ et $D'(A', \vec{u}')$ deux droites non coplanaires, H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance de $D(A, \vec{u})$ à $D'(A', \vec{u}')$ est le réel positif HH' noté $d(D, D')$ et tel que :

$$d(D, D') = HH' = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{u}') \cdot \overrightarrow{AA'}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}$$

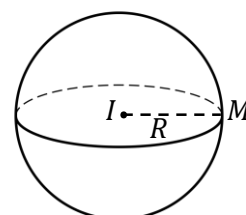


Définition : "Sphère"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif.

On appelle sphère de centre I et de rayon R , l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = R$. On la note : $S(I, R)$.



Conséquence : "Equation cartésienne d'une sphère"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $I(a, b, c)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.

Une équation cartésienne de la sphère $S(I, R)$ est :

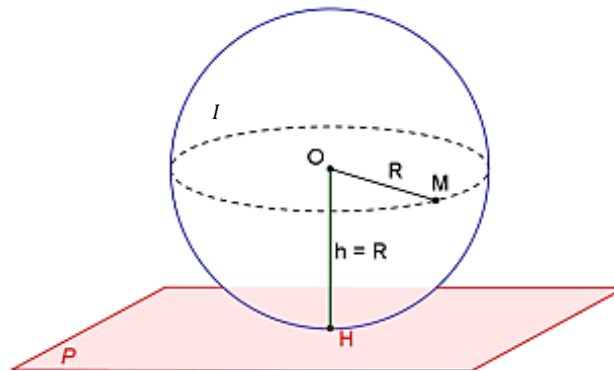
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Théorème : "Section plane d'une sphère"

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $S(O, R)$ une sphère de centre O et de rayon R . Soit P un plan, H le projeté orthogonal de O sur P . Posons h la distance de O à P ($h = OH$).

- 1) Si $h > R$, alors $S \cap P = \emptyset$. Donc S et P sont disjoints.
- 2) Si $h = R$, alors $S \cap P = \{H\}$. Donc S et P sont tangents en H .



- 3) Si $h < R$, alors $S \cap P =$ le cercle du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

