|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Délégation régionale de Zaghouan : Lycée Ennozha | Devoir de synthèse N I 4ème technique 2 | Prof : Mr: Yahyaoui Durée 2heures Année : 2010-2011 |

**Exercice 1( 4 points)**

Pour chaque question, une seule est exacte

1. Soit dans C l’équation ( E) : z²-miz+1=0 où m est un réel non nul. On a alors les solutions de

De ’équation ( E) qui sont :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. réelles
 | 1. opposées
 | 1. inverses
 |

1. Les racines carrées de $\frac{2}{i}$ sont :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. $\frac{\sqrt{2}}{i}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{i}$
 | 1. 1-i et -1+i
 | 1. $\sqrt{2}i$ et-$\sqrt{2}i$
 |

1. -1+i$\sqrt{3}$ est une racine cubique de :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. -8i
 | 1. 8i
 | 1. 8
 |

1. La dérivée de la fonction f(x) =x²sin($\frac{1}{x})$ sur IR|{ 0} est :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. $2x\sin(\left(\frac{1}{x}\right)-\cos((\frac{1}{x})))$
 | 1. -$2x\sin(\left(\frac{1}{x}\right)+\cos((\frac{1}{x})))$
 | c)$ 2x\sin(\left(\frac{1}{x}\right)+\cos((\frac{1}{x})))$ |

**Exercice 2( 5 points)**

****

Dans le graphique ci-dessus ;on a représenté la courbe ( $C\_{f}$ ) d’une fonction f définie sur IR/{1}

La droite ∆ : y=x est une asymptote à ( $C\_{f}$ ) au voisinage de+∞ ; ( $C\_{f}$ ) admet une tangente horizontale au point A($\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}$ )

Utiliser le graphique pour répondre :

1. $\lim\_{x\to +\infty }(f(x)$ ,$\lim\_{x\to +\infty }(\frac{f\left(x\right)}{x} )$,$\lim\_{x\to 0^{+}}(\frac{f\left(x\right)}{x} ) $;$\lim\_{x\to 0^{-}}(\frac{f\left(x\right)}{x}$) ,$\lim\_{x\to 1^{+}}f(x)$sin($\frac{1}{f(x)}$)
2. Soit g la restriction de f à l’intervalle $\left]1,\sqrt{3}\right]$
3. Montrer que g réalise une bijection de $\left]1,\sqrt{3}\right]$ sur un intervalle J à déterminer
4. Déterminer le sens de variation de $g^{-1}$ sur J
5. $g^{-1}$ est-t-elle dérivable à droite de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
6. $Tracer $la courbe de $g^{-1}$

**Exercice 3( 5 points)**

 Soit la fonction f définie sur $\left]0,+\infty \right[$ par f(x)=$\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

1. a) Montrer que f est dérivable sur $\left]0,+\infty \right[$ puis calculer f’(x)

b)Dresser le tableau de variation de f

 2) Montrer que l’équation f(x)=x admet dans $\left]0,+\infty \right[$ une unique solution α et que α∈$\left]1,\sqrt{2}\right[$

 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,+\infty \right[$ sur un intervalle J à déterminer

 b) $f^{-1}$ étant la fonction réciproque de f expliciter $f^{-1}\left(x\right) x\in J$

 c) Montrer que pour tout x$\in \left[1,+\infty \right[ |f^{'}(x)|\leq \frac{1}{2}$ et que|f(x)-α|≤$\frac{1}{2}$|x-α|

**Exercice4 ( 6 points)**

 C désigne l’ensemble des nombres complexes, f(z) le polynôme complexe défini par :

$$f\left(z\right)=z^{3}-\left(3+i\right)z^{2}+12iz+4i+12$$

1. a) Ecrire sous forme algébrique $(5-3i)^{2}$
2. Résoudre l’équation : $z^{2}-\left(3-i\right)z-2+6i=0$
3. a) Montrer que l’équation $f\left(z\right)$=0 admet une solution imaginaire que l’on déterminera

 Résoudre alors l’équation $f\left(z\right)$=0

1. Dans le plan complexe rapporté orthonormé ($O,\vec{u},\vec{v} )$. On considère les points A, B et C d’affixes respectives 2i , -1+i et 4-2i
2. Ecrire -1+i et 2i sous forme exponentielle puis en déduire sous forme algébrique $(\frac{-1+i}{2i} )^{12}$
3. Calculer $\frac{z\_{A}-Z\_{C}}{Z\_{A}-Z\_{B}}$puis en déduire que A , B et C sont sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon
4. Vérifier que le point D d’affixe 3-3i est sur ce cercle
5. Pour tout M du plan D’affixe z on associe le point M’ d’affixe z’ tel que z’= (1-3i)z+4i
6. Montrer que $\frac{Z'\_{M'}-Z\_{A}}{Z\_{M}-Z\_{A}}=2e^{i\frac{π}{2}}$ puis la nature du triangle AMM’