|  |  |
| --- | --- |
| Site web : [http://www.matheleve.net](http://www.matheleve.net/)Email1 :contact@matheleve.netEmail2 :matheleve@gmail.com | **Devoir de Synthèse n°01** |
| Lycée Ali Bourguiba Bembla  | 4 ème  Tech1 et 3 | Mercredi 05-12-2012 |  **Chortani et**  **Chaouch** |

**Exercice 1(3 points)**

Répondre par vrais ou faux à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

$$1) Le nombre \left(\cos(\frac{2π}{5})+i \sin(\frac{2π}{5})\right)^{5} est un réel.$$

$2)1+i\sqrt{2012}$ est une solution dans ℂ de l’équation $z^{2}-2z+2013=0$

$$3)Un argument de nombre complexe -2e^{i\frac{π}{5}} est -\frac{π}{5} $$

**Exercice 2 ( 6 points)**

$$Soit la fonction f définie sur IR par f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{\sin(\left(-2x\right))}{x} si x <0\\\sqrt{x^{2}+4}-4 si x\geq 0\end{array}\right.$$

$$1)a)Calculer \lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)$$

$$b) Montrer que  pour tout x<0 ,\frac{1}{x}<f\left(x\right)<-\frac{1}{x}$$

$$c)En déduire \lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)$$

2) a) Montrer que $f$ est continue en 0.

b) Etudier la continuité de $f$ sur [0 ;+ ∞[.

c) Dresser le tableau de variation de $f$ sur [0 ;+ ∞[

d) Montrer que l’équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans [0 ; + ∞[.

e) Vérifier que : 3<α<3,5.

3) Soit $g$ la restriction de $f$ sur [0 ;+ ∞[.

a) Montrer que $g$ réalise une bijection de [0 ;+ ∞[ sur[−2 + ∞[.

b) Exprimer $g^{-1}\left(x\right)$ en fonction de $x$.

c) Dresser le tableau de variation de $g^{-1}.$

**Exercice 3 (6 points)**

1) Résoudre dans ℂ l’équation $E:z^{2}+2z+2 =0$

2)a) Montrer que pour tout réel θ on a : $1+2i sinθ e^{iθ}=e^{2iθ}$

b) Résoudre alors dans ℂ l’équation $E\_{θ}:z^{2}+2z-2i sinθ e^{iθ}=0$

c) On suppose dans cette question que $θ\in \left]0;π\right[$

Donner les solutions de $E\_{θ}$ sous forme exponentielle.

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ on considère les points A , B et C d’affixes respectives $-2$ , $z\_{B}=e^{iθ}-1 et z\_{C}=-1-e^{iθ} tel que θ\in \left]0;π\right[$

 a) Montrer que B et C sont symétriques par rapport à un point fixe I .

 b) Calculer OA et BC en déduire que OBAC est un rectangle.

 c) Trouver $θ$ pour que OBAC soit un carré.

**Exercice 4 ( 5 points)**

$$Soit f la fonction définie sur \left]0;1\right[ par : f\left(x\right)=\frac{2x-1}{\sqrt{x-x^{2}}} $$

$$1) Calculer \lim\_{x\to 0^{+}}f\left(x\right) et \lim\_{x\to 1^{-}}f\left(x\right) puis interpréter graphiquement les résultats $$

$$2)a)Montrer que f est dérivable sur \left]0;1\right[ et que f'\left(x\right)=\frac{1}{2\left(x-x^{2}\right)\sqrt{x-x^{2}}}$$

$$b) Dresser le tableau de variation de f sur \left]0;1\right[ $$

$$c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d’abscisse \frac{1}{2}$$

3) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\left]0;1\right[ $sur un intervalle que l’on déterminera .

4) Tracer dans un repéré orthonormé les courbes représentatives de $f$ et de sa fonction réciproque .