1/4

Résumé : *Nombres complexes* Niveau : *Bac sciences techniques* Réalisé par : *mouhamed aziz mhamdi*

Définition :

Il existe un ensemble noté ℂ, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

* ℂ contient l’ensemble des nombres réels ℝ.
* L’addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
* Il existe un nombre complexe noté 𝑖 tel que 𝒊𝟐 = −𝟏.
* Tout nombre complexe 𝑧 s’écrit de manière unique : 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 avec 𝑎 et 𝑏 sont des réels.

L’écriture 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 avec 𝑎 et 𝑏 réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe 𝑧. 𝑎 est **la partie réelle** de 𝑧, notée 𝑹(𝒛). 𝑏 est **la partie imaginaire** de 𝑧 notée 𝑰(𝒛).

Remarque :

Soit 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

* Si 𝑏 = 0, 𝑧 est réel.
* Si 𝑎 = 0, 𝑧 est dit **imaginaire pur**.

Conséquences :

Soit 𝑧 et 𝑧′ deux nombres complexes.

- 𝑧 est réel ssi 𝐼(𝑧) = 0.

- 𝑧 est imaginaire pur ssi 𝑅(𝑧) = 0.

- 𝑧 = 0 ssi 𝐼(𝑧) = 𝑅𝑒(𝑧) = 0.

- 𝑧 = 𝑧′ ⟺ 𝑅(𝑧) = 𝑅𝑒(𝑧′) et 𝐼𝑚(𝑧) = 𝐼𝑚(𝑧′).

Définition :

Le plan est muni d’un ROND (𝑂, 𝑢⃗ , 𝑣 ). Soit (𝑎, 𝑏) un point du plan.

* On appelle **affixe** de 𝑀, le nombre complexe noté 𝑎𝑓(𝑀) ou 𝑧𝑀 tel que :

𝑎𝑓𝑓(𝑀) = 𝑎 + 𝑖𝑏. Le nombre complexe 𝑎 + 𝑖𝑏 est dit aussi l’affixe du vecteur ⃗𝑂⃗⃗⃗𝑀⃗⃗ , on le note 𝑎𝑓𝑓(⃗𝑂⃗⃗⃗𝑀⃗⃗ ) ou 𝑧⃗𝑂⃗⃗⃗⃗𝑀⃗⃗ .

* (𝑎, 𝑏) est le **point image** du nombre complexe 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏.

Propriétés :

𝐴 et 𝐵 sont deux points du plan d’affixes respectives 𝑧𝐴 et 𝑧𝐵. 𝑢⃗ et 𝑣 sont deux vecteurs.

1) 𝑎𝑓(⃗𝐴⃗⃗⃗𝐵⃗ ) = 𝑧⃗𝐴⃗⃗⃗𝐵⃗ = 𝑧𝐵 − 𝑧𝐴

2) 𝑎𝑓(𝛼𝑢⃗ + 𝛽𝑣 ) = 𝛼 𝑎𝑓𝑓(𝑢⃗ ) + 𝛽 𝑎𝑓𝑓(𝑣 ) pour tous réels 𝛼 et 𝛽.

Définition : *"Conjugué d’un nombre complexe"*

Soit 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de 𝑧 et on note 𝑧,̅ le nombre complexe défini par 𝒛̅ = 𝒂 − 𝒊𝒃.

Propriétés :

Soient 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 et cartésienne.

1) ̅𝑧̅̅+̅̅̅𝑧̅̅′ = 𝑧̅ + 𝑧̅′

2) ̅𝑧̅̅∙̅𝑧̅̅′ = 𝑧̅ ̅∙̅𝑧̅̅′

3) ̅𝑧̅𝑛̅ = (𝑧)̅ 𝑛, 𝑛 ∈ ℕ∗

𝑧′ = 𝑎′ + 𝑖𝑏′

deux nombres complexes donnés sous forme

5)

6)

7)

𝑧 + 𝑧̅ = 2𝑎

𝑧 − 𝑧̅ = 2𝑖𝑏

𝑧 ∙ 𝑧̅ = 𝑎2+𝑏2

4) ( ) = , 𝑧′ ≠ 0

̅̅̅

𝑧

̅̅

𝑧̅

𝑧′ 𝑧̅′

Soit 𝑧 un nombre complexe.

– 𝑧 est réel ⇔ 𝑧 = 𝑧̅

– 𝑧 est imaginaire pur ⇔ 𝑧 = −𝑧̅

Théorème :

Définition : *"Module d’un nombre complexe"*

Soit 𝑧 = 𝑎 + 𝑖𝑏 un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de 𝑧 et on note |𝑧|, le réel positif défini par |𝑧| = √𝑎2 + 𝑏2 = √𝑧𝑧̅

Propriétés :

6) |𝑧 + 𝑧′| ≤ |𝑧| + |𝑧′|

3) |−𝑧| = |𝑧|

𝑧′ |𝑧′|

5) | 𝑧 | = |𝑧| , 𝑧′ ≠ 0

2) |𝑧|̅ = |𝑧|

Soient 𝑧 et 𝑧′ deux nombres complexes.

1) |𝑧 ∙ 𝑧′| = |𝑧| ∙ |𝑧′| 4) |𝑧𝑛| = |𝑧|𝑛, 𝑛 ∈ ℕ∗

Propriété :

2/4

Soit A et B deux points d’affixes respectives 𝑧𝐴 et 𝑧𝐵.

Alors : 𝐴𝐵 = |𝑧𝐵 − 𝑧𝐴|