Les nombres complexes (I)
Limites et continuité

Séance 3

EXERCICE 1:

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$ et $z = z_1 + z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle.

2) a) Placer les points A, B et E d'affixes respectives z_1, z_2 et z

b) Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O

c) En déduire que le quadrilatère OAEB est un carré.

3) Justifier que OE= $2\sqrt{6}$ et que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$. Ecrire alors z sous la forme exponentielle.

EXERCICE 2:

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_B = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

1) a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle.

b) Montrer que $z_B = z_A . e^{i\frac{\pi}{3}}$

c) En déduire la nature du triangle OAB.

2) Placer le point A puis le point B.

3) a) Donner la forme algébrique de z_B.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

EXERCICE 3:

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $a = -i$ et $b = 3i$

A tout point M distinct de B d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z' = i\frac{z+i}{z-3i}$

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que :

a) z' est imaginaire. b) z' est réel.

2) a) Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$

b) En déduire que si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

EXERCICE 4:

1) Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$[2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})]^{26}$, $-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$

2) Montrer que $(\sqrt{3} - i)^{66}$ est un réel négatif.

3) Ecrire sous la forme exponentielle chacun des complexes : $z_1 = i + e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}} - 1$

EXERCICE 5:

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x+4}\right)$

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x)= f(x)-x$

   a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.

   b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\infty,\frac{1}{2}[$.
   Vérifier que $-0{,}7< \alpha < -0{,}6$

   c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

3) On donne le tableau de variation d'une fonction h définie et dérivable sur $[-1,+\infty[$:
   On pose t=goh

   a) Calculer t(-1) et $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x)$

   b) Déterminer $t([-1,+\infty[)$

   c) Montrer que la fonction t est continue sur $[-1,+\infty[$

   d) Dresser le tableau de variation de la fonction t

   e) En déduire que l'équation t(x)= 0 admet une unique solution β dans $[-1,+\infty[$.