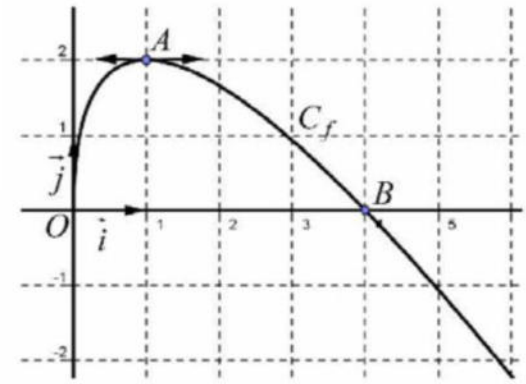
Dérivabilité d'une fonction
Comportement asymptotique

Séance 1

EXERCICE 1:

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f **définie** et **dérivable** sur $]0,+\infty[$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On sait que :

- La courbe C_f admet au point $A(1,2)$ une tangente d'équation $y=2$.
- La courbe C_f passe par le point $B(4,0)$.



1) a – Déterminer $f'(1)$.

   b – Comparer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f'(2)$

2) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=[f(x)]^2$.

   a – Exprimer $g'(x)$ en fonction de x.

   b – Dresser le tableau de variation de g.

EXERCICE 2:

Soit la fonction f : $x \mapsto \frac{x^2}{x-2}$ On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) a) Montrer que la droite D : $y = x + 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

   b) Etudier la position de la droite D par rapport à la courbe (C).

3) Etablir le tableau de variation de f.

EXERCICE 3:

Soit la fonction f définie sur $[-3,+\infty[$ par $f(x)= x\sqrt{2x+6}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé du plan.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-3). En déduire une interprétation géométrique

2) Montrer que f est dérivable sur $]-3,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$ $\forall$ $x\in]-3,+\infty[$.

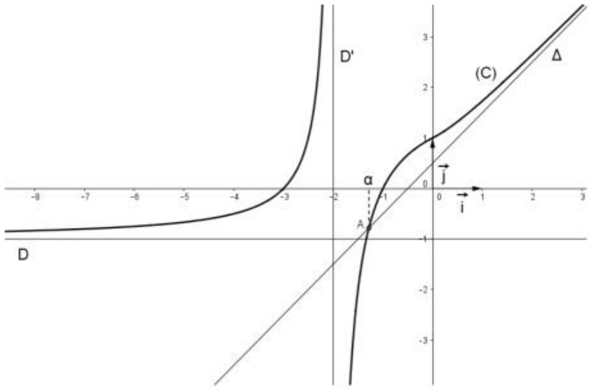
3) Etablir le tableau de variation de f.

4) a) Vérifier que la courbe (C) passe par les points A(-1,-2) et B(1,3).

   b) Montrer que la courbe (C) admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB).

EXERCICE 4:

On donne la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $\mathrm{IR}\backslash\{-2\}$.
(Voir la figure ci-contre)



- La droite Δ : $y=x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
- La droite D : $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $-\infty$
- La droite D' : $x=-2$ est une asymptote verticale à (C) à droite et à gauche.

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-\frac{1}{2}\right]$$

2) Dresser le tableau de variation de f

3) Dresser le tableau de signe de l'expression $d(x)=f(x)-x-\frac{1}{2}$

4) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x}{f(x)-x-\frac{1}{2}}$

EXERCICE 5:

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etablir le tableau de variation de la fonction f.

2) Vérifier que $f(x)=x+2+\frac{3}{x-1}$ pour tout réel $x \in \mathrm{IR}\backslash\{1\}$

3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.

4) Etudier la position de (C) par rapport à Δ.

EXERCICE 6:

Soit la fonction f définie sur$]-1,+\infty[$par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ On note (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que f est dérivable sur$]-1,+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{x+2}{2(\sqrt{x+1})^3}$ $\forall x \in]-1,+\infty[$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point O.

b) Montrer que $f(x)-x=\frac{-x^2}{\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}$. En déduire la position de (C) par rapport à (T).

EXERCICE 7:

La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $I=]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.