Dérivabilité d'une fonction
Equations à coefficients complexes

Séance 4

EXERCICE 1:

1) a) Calculer $(2+i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-3(2+i)z+2(3+4i)=0$

2) Soit l'équation (E') : $z^3-2(3+2i)z^2+(3+14i)z+8-6i=0$

a) Montrer que l'équation (E') admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure z_1.

b) Soit le polynôme $P(z)=z^3-2(3+2i)z^2+(3+14i)z+8-6i$

Déterminer les complexes a, b et c tels que : $P(z)=(z-z_1)(az^2+bz+c)$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

EXERCICE 2:

Pour tout réel $\theta\in\,]0,\pi[$ on donne l'équation dans $\mathbb{C}$:

(E_θ) : $z^2-e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z+e^{i3\theta}=0$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E'_θ) : $z^6-e^{i\theta}(1+e^{i\theta})z^3+e^{i3\theta}=0$.

2) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $e^{i2\theta}$.

a) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

b) Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $|1+e^{i\theta}|=1$

3) a) Déterminer le module et un argument du complexe $1+e^{i\theta}$.

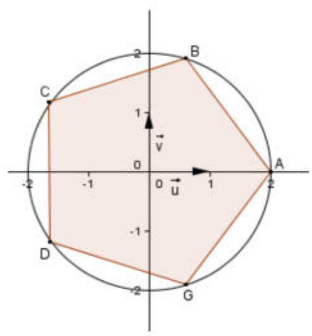
b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle ABC soit équilatéral

EXERCICE 3:

I/ 1) Déterminer les racines quatrièmes puis les racines sixièmes du nombre complexe $z=-32+i.32\sqrt{3}$

2) Représenter dans chacun des deux cas les images des solutions sur le cercle de centre O dont on précisera le rayon.

II/ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. Dans la figure ci-contre ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 et A(2,0). Donner les affixes des points B, C, D et E.



EXERCICE 4:

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction dérivée f' varie comme l'indique le tableau ci-contre :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

<u>Répondre par **vrai** ou **faux**</u>

1. La courbe de f admet deux tangentes horizontales.
2. Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion pour la courbe de f.
3. Pour tous réels a et b , on a $|f(a)-f(b)| \leq 2|a-b|$.
4. Si $f'(0)=f(0)=1$ alors $(f \circ f)'(0)=2$.

EXERCICE 5:

La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $I=]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ $\forall x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

3) Soit la fonction g définie sur IR\{0} par $g(x)=f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

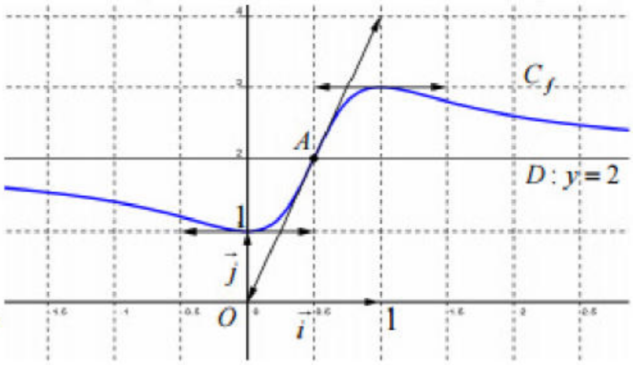
Montrer que g est dérivable sur IR\{0} et calculer $g'(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 6:

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie sur IR.

On sait que :

- La droite D d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- La courbe C_f admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
- $A\left(\frac{1}{2},2\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f



Quelle est parmi les trois courbes tracées ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f' ?
Justifier votre réponse.