

Dérivabilité d'une fonction

Equations à coefficients complexes

Séance 1

EXERCICE 1:

La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ et (C) sa courbe selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. En déduire une interprétation géométrique.

b) Montrer que f est dérivable sur $I=]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \quad \forall x \in I$.

2) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$ puis vérifier que $0,2 < \alpha < 0,3$

4) Soit la fonction g définie sur $] -\infty, 0[$ par $g(x) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

Montrer que g est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 0[$.

EXERCICE 2:

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2 + x}$. On désigne par (C) sa courbe selon un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en (-1). En déduire une interprétation géométrique.

2) Etablir le tableau de variation de la fonction f .

3) Etudier les branches infinies de (C).

4) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .

b) Etablir le tableau de variation de la fonction g

c) Montrer que le point A(-1,2) est un point d'inflexion de (C).

EXERCICE 3:

1) Déterminer les racines cubiques de l'unité puis les racines quatrièmes du nombre complexe $z = -8 + i \cdot 8\sqrt{3}$

2) Représenter dans chacun des deux cas les images des solutions sur le cercle de centre O dont on précisera le rayon.



EXERCICE 4:

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$. Ecrire les solutions sous la forme exponentielle.
b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.
- 2) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
a) Vérifier que $ie^{i\theta}$ est une racine carrée de $-e^{2i\theta}$
b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points : A, B et C d'affixes respectifs $z_A = 1 + ie^{i\theta}$, $z_B = 1 - ie^{i\theta}$ et $z_C = 2$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
a) Calculer l'affixe z_I du point I milieu de [AB].
b) Montrer que : $z_A = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$ et que $z_B = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$
c) Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle.
d) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OACB soit un carré.

