

Dérivabilité d'une fonction

Equations à coefficients complexes

Séance 2

EXERCICE 1:

Soit la fonction : $x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Etablir le tableau de variation de la fonction f .
- 2) Vérifier que $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$ pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- 3) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ dont on donnera une équation.
- 4) Etudier la position de (C) par rapport à Δ .
- 5) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x > 2 \\ g(x) = 7 + \sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$
 - a) Etudier la dérivabilité de g en 2. En déduire une interprétation géométrique.
 - b) Etudier la dérivabilité de g sur \mathbb{R} .
 - c) Etablir le tableau de variation de la fonction g .

EXERCICE 2:

- 1) Déterminer les racines carrées de chacun des complexes suivants :
 -16 , -2 , $2i$, $\sqrt{3} + i$, $i.e^{i\frac{5\pi}{6}}$
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} chacune des équations suivantes :
 a) $z^2 - (2i + 1)z + i + 1 = 0$ b) $z^2 + 4iz - 4 = 0$ c) $iz^2 - (1 + 2i)z + 1 + i = 0$

EXERCICE 3:

Soit l'équation (E) : $z^2 + 2(\sqrt{3} + i)z + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

On désigne par z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E).

- 1) a) Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que $|z_1 \cdot z_2| = 16$ et $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 b) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure (notée z_1) que l'on déterminera.
 c) En déduire l'autre solution z_2 puis l'écrire sous la forme exponentielle.
- 2) Résoudre alors dans \mathbb{C} l'équation (E') : $z^4 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

EXERCICE 4:

- 1) On considère l'équation (E) : $z^2 - 2e^{i\frac{\pi}{5}}z + e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 = 0$
 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on donne les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $z_C = -1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$
 a) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \cdot e^{i\frac{\pi}{10}}$ et que $z_C = 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}$
 b) Montrer que le quadrilatère OBAC est un rectangle.



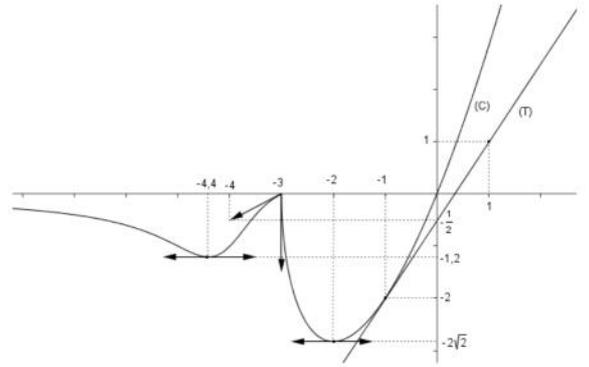
EXERCICE 5:

Dans le graphique ci-contre on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

× (T) est la tangente à (C) au point A(1,1).

× Chaque flèche représente un vecteur directeur d'une demi-tangente.

× La courbe (C) admet exactement deux tangentes horizontales.



- 1) a) Déterminer : $f'_g(-3)$ et $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{f(x)}{x+3}$
b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f'(x) = 0$
- 2) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.
- 3) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

EXERCICE 6:

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; $x \in]0,3[$

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,3[$ et que $f'(x) = \frac{9}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ pour tout $x \in]0,3[$.
b) Etablir le tableau de variation de f .
- 2) On pose $g(x) = f(x) + x$, $x \in]0,3[$.
 - a) Dresser le tableau de variation de la fonction g .
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.
 - c) Dresser alors le tableau de signe de $g(x)$ pour $x \in [1,2]$.

EXERCICE 7 :

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
- 2) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.
■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- 3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.
Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$

