Limites et continuité

Séance 2

EXERCICE 1:

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)+2 & \text{si } x<0 \\ f(x) = \frac{2-x^2}{1+x^2} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a : $2x+2\leq f(x)\leq 2$
2) En déduire que f est continue en 0.
3) a) Montrer que la fonction $u : x \longmapsto \cos\frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty,0[$.
   b) En déduire que la fonction f est continue sur IR
4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$

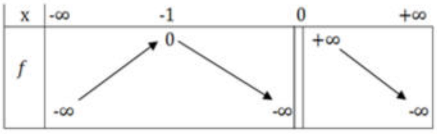
EXERCICE 2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^3+x+1 & \text{si } x\leq 0 \\ 1+x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout $x>0$, $1-x\leq f(x)\leq 1+x$.
   b) Etudier la continuité de f en 0.
2) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-\infty,0[$ une unique solution α.
   b) Vérifier que $-0.7<\alpha<-0.6$
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(\frac{1}{x})$.

EXERCICE 3:

Voici le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $IR\setminus\{0\}$.



1) Déterminer chacune des limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(-1+\frac{1}{x^2})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x^3+\frac{1}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{1-fof(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{f(x)}$

2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :
   $]-\infty,-1]$, $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions dans $IR\setminus\{0\}$
   b) En déduire le tableau signe de $f(x)$ pour tout $x\in IR\setminus\{0\}$.

EXERCICE 4:

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$ définie et dérivable sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ et voici son tableau de variation

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x+4}\right)$
2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par : $g(x)=f(x)-x$
   a) Déterminer l'image de $]-\infty,\frac{1}{2}[$ par g.
   b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\infty,\frac{1}{2}[$.

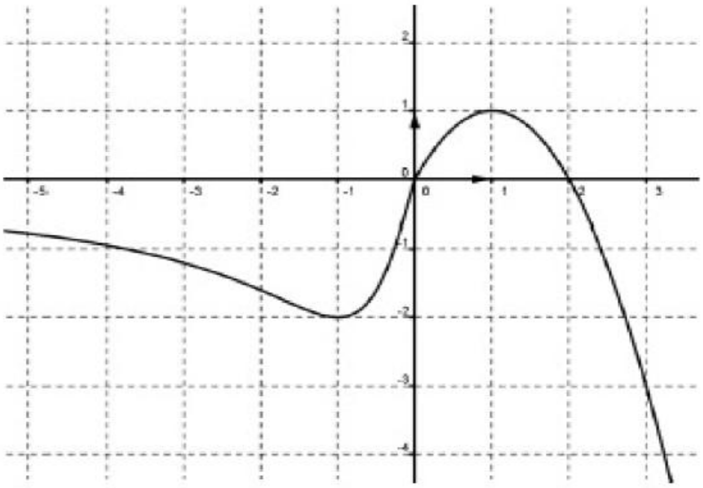
Vérifier que $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$

c) Montrer que : $\alpha^2(1-2\alpha) = 1$

EXERCICE 5:

C_f admet au voisinage de :

- **$-\infty$ une asymptote d'équation $y=0$.**
- **$+\infty$ une branche infinie parabolique de direction la droite d'équation $x=0$**



1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) Déterminer : $f(IR)$ et $f\circ f(IR)$

3) *a*- Déterminer graphiquement le domaine de définition de f, de $u=\dfrac{1}{f}$ et de $v=\sqrt{f}$.

***b*- La fonction u est elle prolongeable par continuité en 2?**

4) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ et la fonction $h = g\circ f$

***a* – Montrer que h est continue sur $]2,+\infty[$.**

***b* – Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $h(3)$.**

5) Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $k(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\geq 0 \\ x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } x<0 \end{cases}$

***a* – Montrer que pour tout $x<0$, on a $0\leq k(x)\leq 2x^2$.**

***b* – En déduire que k est continue en 0.**

***c* – Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\dfrac{\pi^2}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.**