SERIE n°17

EXERCICE N°1:

Dans la vitrine d'un bijoutier sont exposés 3 bracelets; 3 bagues ; 7 colliers et 7 montres. Au cours de la nuit, un voleur a cassé la vitrine, mais surpris par un Monsieur « X », s'est enfui en emportant seulement 4 bijoux attrapés au hasard.
On suppose que chaque bijou a la même probabilité d'être prise par le voleur.
Déterminer la probabilité des événements suivantes à 10^{-3} prés.

A : « Le voleur a emporté un bijou de chaque sorte ».
B : « Le voleur a emporté 4 bijoux de même nature ».
C : « Le voleur a emporté les 3 bagues ».
D : « Le voleur a emporté au moins un collier »

EXERCICE N°2:

Un dé cubique parfait porte les numéros 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6 ; la probabilité d'apparition de chaque numéro est proportionnelle à ce numéro .
On considère 2 urnes U_1 et U_2 tel que:

- L'urne U_1 contient 8 boules blanches et 2 boules noires.
- L'urne U_2 contient 7 boules rouges et 3 boules noires.

1°) Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

2°) On lance le dé une fois ; si le numéro est 6 ,on tire une boule de U_1est on note sa couleur ; si le numéro n'est pas 6 , on tire une boule de U_2 est on note sa couleur.

a- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
b- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?
c- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

3°) On tire maintenant une boule de U_1. On note sa couleur et on la remet. On fait cette opération 4 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a- Exactement une boule blanche ?
b- Aucune boule blanche ?
c- Au moins une boule blanche ?

PROBLEME :

A/ Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1°) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Montrer que pour tout réel x on à : $\dot{f}(x) = \dfrac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

c- Dresser le tableau de variation de f .

d- Montrer que le point $I\left(0\,,\,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de ξ .

e- Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à ξ au point I .

2°) a- Montrer que pour tout réel t on a : $\dot{f}(t) \leq \frac{1}{2}$.

b- En intégrant les deux membre de l'inégalité précédente, montrer que pour $x \geq 0$ on a : $f(x) \leq \frac{1}{2}(x+1)$.

c- Déterminer alors la position de ξ par rapport à (T).

3°) Tracer (T) et ξ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) a- Montrer que f est une bijection de $\Re$ sur $]0\,,1[$.

b- Soit $y \in]0\,,1[$; Déterminer le réel x tel que $f(x) = y$.

c- En déduire la représentation graphique dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $]0\,,1[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

B/ On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$I_n = \int_{-1}^{0} \frac{e^{2nt}}{1+e^{2t}}\,dt$$

1°) a- Montrer que (I_n) est décroissante et positive.

b- En déduire que (I_n) est convergente.

2°) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $I_n \leq \dfrac{1}{2n}$.

3°) Trouver la limite de I_n quand n tend vers l'infini .

BON TRAVAIL