SERIE N° 4

EXERCICE N°1 :

On considère dans C l'équation $(E): z^2-(3-i)z+4=0$.

1°) a- Résoudre dans C l'équation (E) ;on note z_1 et z_2 les solutions / $\text{Im}(z_1)>0$

b- Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique .

2°) Soit dans C l'équation $(E'): 3z^3+(-9+i)z^2+(14+6i)z-8i=0$.

a- Vérifier que $z_0=\frac{2}{3}i$ est une solution de (E').

b- Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que $\forall\, x\in C$ on a :

$$3z^3+(-9+i)z^2+(14+6i)z-8i=(z-z_0)(az^2+bz+c).$$

c- Résoudre alors l'équation (E').

3°) Le plan est rapporté à un R.O.N direct, on considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A=1+i$, $z_B=2-2i$ et $z_C=\frac{2}{3}i$.

a- Calculer $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ et montrer que $(\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b- En déduire la nature du triangle ABC.

c- Ecrire une équation cartésienne du cercle ζ circonscrit au triangle ABC.

EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}$.

On désigne par ξ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variations de f .

2°) a- Montrer que la droite $\Delta: y=-2x+1$ est une asymptote à ξ_f .

b- étudier la position de ξ_f par rapport à Δ.

c- Tracer ξ_f et Δ dans le même R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) a- Montrer que f réalise une bijection de $\Re$ sur un intervalle J a préciser.

b- Construire $\xi_{f^{-1}}$ dans le même R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c- Montrer que $\forall\, x\in J$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+2x+2}{2(x-1)}$.

4°) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\Re$ une solution unique α et que $\alpha\in\left]\frac{3}{2}\,,2\right[$.

5°) Soit g la fonction définie sur $[0\,,\pi]$ par : $g(x)=1+f'(\cos x)$.

a- Vérifier que $\forall\, x \in [0\,,\,\pi]$, $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$ et que $g'(x) = \dfrac{-3\sin x}{\left(\sqrt{\cos^2 x + 3}\right)^3}$.

b- Montrer que g réalise une bijection de $[0\,,\,\pi]$ sur un intervalle I a préciser .

c- Déterminer le domaine D de la dérivabilité de g^{-1} et montrer que :

$$\forall\, x \in D\ ,\quad \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2-1)\sqrt{1-4x^2}}.$$

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction définie sur $\Re_+^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1-\cos \pi x} & si\ x \in\,]0,1] \\ f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

1°) a- Montrer que f et continue en 1.

b- Etudier la dérivabilité de f en 1.

2°) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Déterminer $f'(x)$ lorsque $x \in\,]0,1[$ et $x \in\,]1,+\infty[$.

3°) Soit $g\ : [1,+\infty[\ \rightarrow \Re\ /\ g(x) = x - \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2-1}$.

a- Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que pour tout $x \in$ J on a $g^{-1}(x) = \dfrac{4x^2+4x+5}{8x+4}$.

4°) Soit $\varphi\ :]0,1] \rightarrow \Re\ /\ \varphi(x) = \dfrac{1}{1-\cos \pi x}$

a- Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} dont on précisera le domaine de définition.

b- Montrer que φ^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et que $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$;

$\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{-\pi x\sqrt{2x-1}}$; φ^{-1} est elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

5°) Montrer que l'équation $\varphi\ (x) = x$ admet une seul solution $x_0 \in\,]0,1[$.

Calculer $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire x_0 .

BON TRAVAIL