SERIE N° 5

EXERCICE N°1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1°) a- Résoudre dans C l'équation $z^2-4z+8=0$.

b- Ecrire les solutions sous la forme algébrique et trigonométrique.

2°) On considère les points A et B d'affixes respectives $2-2i$ et $2+2i$.

a- Placer dans le plan les points A et B.

b- Quelle est la nature du triangle OAB ?

3°) Soit le point C du plan d'affixe : $z_C=(2-2i).e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a- Ecrire z_C sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique.

b- En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4°) a- Comparer OA et OC et donner une mésure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

b- quelle est la nature exacte du triangle OAC.

EXERCICE N°2 :

Pour tout nombre complexe non nul z, On pose $w=z+\frac{4}{z}$.

1°) Soit θ un réel donné.

a- Résoudre dans C l'équation : $z+\frac{4}{z}=4\cos\theta$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

Dans tout la suite le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

2°) Atout nombre complexe z on associe le point M d'affixe z.
Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que le nombre complexe w est un réel.

3°) Soient A , B et C les points d'affixe respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a- Placer, pour $\theta=\frac{\pi}{6}$. Les points A , B et C dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

b- Vérifier que pour tout valeur de θ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ les points A , B et C appartiennent à l'ensemble E.

c- Montrer que pour tout valeur de θ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ le quadrilatère OABC est un losange.

d- Pour quelle valeur de θ ce quadrilatère est-il un carré ?

EXERCICE N°3 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^2}$.

On désigne par ξ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Dresser le tableau de variations de f.

b- Tracer ξ_f.

2°) a- Montrer que f réalise une bijection de $\Re$ sur un intervalle J a préciser

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c- Construire $\xi_{f^{-1}}$ dans le même R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) On considère la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

c- Etudier le signe de h pour x dans $[0, +\infty[$.

4°) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(tgx) & si \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$.

a- Vérifier que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = 3\cos^2 x - 1$.

b- Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I a préciser.

c- Déterminer le domaine D de la dérivabilité de g^{-1} et montrer que :

$$\forall x \in D, \quad \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x+1).(2-x)}}.$$

BON TRAVAIL