# SERIE N° 11

## EXERCICE N°1 :

On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$

1°) Vérifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} - 3 = \dfrac{3 - u_n}{\sqrt{12 - u_n} + 3}$.

2°) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ \ |u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$.

3°) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ \ |u_{n+1} - 3| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4°) Déterminer la limite de $u_n$ quand $n$ tends vers $+\infty$.

## EXERCICE N°2 :

**A/** Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 2x\log x - x - 1$.

1°) a- Calculer la limite de $g(x)$ en $+\infty$.

b- Dresser le tableau de variation de $g$.

2°) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique $\alpha$.

Vérifier que : $2 < \alpha < 2.1$.

b- En déduire le signe de $g(x)$.

**B/** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^2(\log x - 1) - x & si\ \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désiggne par $\xi_f$ la courbe représentative de $f$ dans un RON$(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$.

1°) a- Montrer que $f$ est continue à droite en 0.

b- Montrer que $f$ est dérivable à droite en 0.

c- Ecrire une équation de la demi-tangente à $\xi_f$ à droite au point $O$.

2°) a- Montrer que $\forall\ x > 0$ on a $f'(x) = g(x)$.

b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau des variation de $f$ et montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + \beta}{2}$.

3°) Soit $D$ la droite d'équation : $y = -x$.

a- Etudier la position relatives de $\xi_f$ et $D$.

b- Tracer $\xi_f$ et $D$ dans le même RON$(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j}\,)$ ( $prendre\ \alpha \approx 2$).

## EXERCICE N°3 :

**Partie A:** Soit $g$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x + 1 + \log x$.

1°) Dresser le tableau de variation de $g$.

2°) a- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique $\alpha$.
Vérifier que : $0.27 < \alpha < 0.28$.
b- En déduire le signe de $g(x)$.

**Partie B:** Soit $f$ la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x \log x}{x+1} & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $\xi_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$ ;$(unité\ 4Cm)$

1°) Montrer que $f$ est continue à droite en 0.

2°) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

3°) a- Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$.
b- Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
c- Etudier les variations de $f$.
d- Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\xi_f$ au point $A(1,0)$.
e- Construire $\xi_f$.

4°) Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[\alpha\ ,\ +\infty[$

a- Montrer que $h$ réalise une bijection de $[\alpha\ ,\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ,\ \alpha]$.
b- La fonction $h^{-1}$ est-elle dérivable à gauche en $\alpha$.
c- Dresser le Tableau de variation de $h^{-1}$.

**Partie C:** Soit $n$ un entier naturel non nul.

1°) Montrer que l'équation $h(x) = \alpha - \dfrac{1}{n}$ possède dans $[\alpha\ ,\ +\infty[$ une seul solution $\alpha_n$

2°) a- Montrer que $h(\alpha_{n+1}) > h(\alpha_n)$.
b- En déduire que la suite $(\alpha_n)$ est décroissante.
c- Montrer que $(\alpha_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**BON TRAVAIL**~~EXERCICE N°6 :~~