SERIE N° 11

EXERCICE N°1 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$

1°) Vérifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} - 3 = \dfrac{3 - u_n}{\sqrt{12 - u_n} + 3}$.

2°) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 3|$.

3°) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1} - 3| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4°) Déterminer la limite de u_n quand n tends vers $+\infty$.

EXERCICE N°2 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1°) Soit le plan $P : x - y - z + 2 = 0$ et la droite $\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} ;\quad t \in \Re$

Montrer que $\Delta // P$.

2°) Soit $A(1, 0, 1)$.

a- Calculer $d(A, P)$.

b- Déterminer les coordonnées du point A' projeté orthgonal de A sur P.

3°) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ' qui passe par A et perpendiculaire à P.

4°) donner une équation cartésienne du plan Q contenant Δ et perpendiculaire à P.

5°) Soit le plan $\Re : x + z - 1 = 0$.

a- Montrer que $R \perp P$.

b- Donner une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap R$.

6°) Soit le plan $P_m : (m-1)x + y + mz + m - 1 = 0\ ,\ m \in \Re$.

Montrer que tous les plans P_m par une droite fixe D'.

EXERCICE N°3 :

A/ Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 2x\log x - x - 1$.

1°) a- Calculer la limite de $g(x)$ en $+\infty$.

b- Dresser le tableau de variation de g.

2°) a- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α.

Vérifier que : $2<\alpha<2.1$.

b- En déduire le signe de $g(x)$.

B/ Soit f la fonction définie sur $[0\ ,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases} x^2(\log x-1)-x & si\ \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On désiggne par ξ_f la courbe représentative de f dans un RON$(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$.

1°) a- Montrer que f est continue à droite en 0.

b- Montrer que f est dérivable à droite en 0.

c- Ecrire une équation de la demi-tangente à ξ_f à droite au point O.

2°) a- Montrer que $\forall\ x>0$ on a $f'(x)=g(x)$.

b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau des variation de f et montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}$.

3°) Soit D la droite d'équation : $y=-x$.

a- Etudier la position relatives de ξ_f et D.

b- Tracer ξ_f et D dans le même RON$(O\ ,\vec{i}\ ,\vec{j})$ $(\ prendre\ \alpha\approx 2)$.

BON TRAVAIL ~~EXERCICE N°6 :~~