SERIE N° 13

EXERCICE N°1 :

Résoudre dans $\Re$ les équations et les inéquations suivantes :

1°) $e^{x^2+1} = e^{2x}$. 2°) $e^{x^2-x+1} = 1$. 3°) $e^{2x-1} = -e^{-x+1}$. 4°) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = 2$.

5°) $e^x - 3 = 4\, e^{-x}$. 6°) $e^x > 3$. 7°) $e^{2-x} > 3$. 8°) $e^{-x^2+3} > e^{2x}$

EXERCICE N°2 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = e^{-x}$. 2°) $f(x) = e^{4x-1}$. 3°) $f(x) = e^{-x^2+1}$ 4)° $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

5°) $f(x) = x^2\, e^{3x-1}$. 6°) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. 7°) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}\, e^{1-x} + e^{x^2}$.

EXERCICE N°3 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1°) $f(x) = e^{-x}$ sur $\Re$. 2°) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\Re$. 3°) $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$ sur $\Re$.

4°) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}-1}}{x^2}$ sur $]0,+\infty[$. 5°) $f(x) = \dfrac{x e^{x^2}}{1 - e^{x^2}}$ sur $]0,+\infty[$.

EXERCICE N°4 :

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x + \log 3x$. 2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}$. 3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^x}{x\, e^x}$. 4°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$.

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{e^x}$. 6°) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. 7°) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - 3e^x + 2$.

EXERCICE N°5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1°) Etudier les variations de f ?

2°) a- Montrer que f est impaire ?

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente au point O .

c- Tracer ξ_f dans un repère Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Montrer que f est une bijection de $\Re$ sur un intervalle J à préciser.

4°) Déterminer pour chaque $x \in J$ l'expression de $f^{-1}(x)$.

5°) a) Déterminer les primitives de f .

b) Déterminer la primitive de F de f qui s'annule en 0.

PROBLEME :

A/

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère Orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a- Déterminer le domaine de définition de f.

b- Calculer les limites aux bornes.

c- Etudier les variations de f.

2°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour ξ_f.

3°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0, +\infty[$

Vérifier que $\alpha \in]2, 2.1[$.

4°) Construire ξ_f.

5°) Soit g la restriction de f à $]0, +\infty[$.

a- Montrer que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera (on désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g).

b- Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\xi_{g^{-1}}$ au point B d'abscisse 4.

c- Construire $\xi_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d- Calculer $g^{-1}(x)$ pour $x \in I$.

e- Déterminer la primitive G de g sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $\log\sqrt{2}$.

B/

Soient h la fonction définie par $h(x) = \log\left|e^{2x} - 1\right|$ et ξ' sa courbe représentative dans un repère Orthonormé $(O', \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$.

1°) a- Déterminer le domaine de définition de h.

b- Calculer les limites aux bornes.

c- Dresser le tableau de variation de h.

2°) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x) - 2x]$.

En déduire que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote oblique à ξ'.

b- Etudier la position relative de D et ξ'.

3°) Construire ξ' et D ; on précisera l'intersection de ξ' avec l'axe des abscisses $(O', \overrightarrow{U})$.

BON TRAVAIL