SERIE N° 6

EXERCICE N°1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit w un nombre complexe d'argument $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et de partie imaginaire $tg\theta$.

1°) a- Ecrire la forme trigonométrique de w.

b- En déduire la forme algébrique de w.

2°) Résoudre dans C l'équation : $2z^2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

(on appelle z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution)

3°) On considères les points A , B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et w.

a- Déterminer θ pour que $CA = CB$.

b- Montrer que dans ce cas le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE N°2 :

1°) Etudier les variation de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{4-x}$ et construire sa courbe représentative (ξ_g) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x}$.

a- Etudier la position de la courbe représentative (ξ_f) de f par rapport à (ξ_g).

b- Etudier les variations de la fonction f.

c- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $\left]-\infty, 4\right]$ et vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[$.

d- Construire la courbe (ξ_f) dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left]0, 4\right]$ une solution unique x_0.

Vérifier que $x_0 \in \left]\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right[$.

4°) On pose $h(x) = f(4\cos x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Démontrer que la fonction h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur J à préciser.

b- Etudier la dérivabilité de h^{-1} en $\frac{1}{4}$.

c- Calculer $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et déterminer $\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$.

BON TRAVAIL