SERIE N° 8

EXERCICE N°1 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n < \sqrt{3}$.

b- Montrer que (u_n) est une suite croissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

c- Retrouver alors la limite de u_n.

EXERCICE N°3 :

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha).u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

1°) a- Montrer que pour tout entier n, on a : $u_n \geq 1$.

b- Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α.

b- Exprimer v_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α.

c- Retrouver alors la limite de la suite u_n quand n tends vers $+\infty$.

Bon travail