SERIE n°15

EXERCICE N°1:

Soit f définie sur $\Re$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité :4 cm).

1°) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimité par la courbe ξ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 0$).

2°) Déterminer la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$; et interpréter géométriquement ce résultat.

EXERCICE N°2:

Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + 3 + \dfrac{2(1-\log x)}{\sqrt{x}}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) a- Montrer que la droite $D : y = x + 3$ est une asymptote à la courbe ξ_f .

b- Etudier la position de ξ_f et D.

2°) Déterminer l'aire S de la surface comprise entre ξ_f et D et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ avec $\lambda \geq 1$.

EXERCICE N°3:

On considère la suite des intégrales :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

1°) a- Calculer I_1 et $I_0 + I_1$; en déduire I_0.

b- pour tout entier naturel n calculer $I_{n+1} + I_n$.

2°) a- Montrer sans calcule que la suite (I_n) est croissante.

b- Prouver que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\dfrac{e^{nx}}{e+1} \leq \dfrac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{2}e^{nx}$.

3°) a- En déduire un encadrement de I_n.

b- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{e^n}$.

4°) a- Vérifier que pour tout réel x on a : $\dfrac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

b- En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties déduire $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^3}\,dx$.

BON TRAVAIL