SERIE n°21

EXERCICE N°1:

Dans 5 pays on a prélevé en 1980, le taux de chômage X et le taux d'inflation Y exprimés tous les deux en pourcentage.
Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

x_i	4.5	5	7	8	9
y_i	5	6	6.5	7	8

On choisit au hasard successivement 3 pays différent parmi ces 5 pays et on considère les évènements suivants :

A « Le taux de chômage des trois pays choisis est $\leq$ 8 ».
B « Le taux d'inflation des trois pays choisis est $\geq$ 6 ».

1°) Calculer p(A) ; p(B) ; p(A $\cap$ B) et p(A/B).

2°) On désigne par Z l'aléa numérique définie par :

- $Z = 0$ si les trois pays choisis ont un taux de chômage > 8.
- $Z =$ au rang du premier tirage ayant fourni un pays dont le taux de chômage est$\leq$8.Déterminer la loi de probabilité de Z .

3°) a- Calculer le coefficient de corrélation $r(X,Y)$, Que peut-on en déduire.
b- Déterminer la droite de régression de y par rapport à x.

EXERCICE N°2:

Une boîte B_1 contient 3 jetons numérotés : 0 , 0 , 2.
Une boîte B_2 contient 4 jetons numérotés : 1 , 1 , 3 , 4.

1°) On tire au hasard un jeton de chaque boîte et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le produit des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) On effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente, chaque jeton étant remis dans sa boite après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a- Exactement deux fois un produit supérieur à quatre ?
b- Au plus une fois un produit supérieur à quatre ?

3°) Une épreuve consiste à faire des tirages d'un jeton de la boite B_1, en remettant chaque fois le jeton tiré. On désigne par p_n la probabilité de l'événement :
« Obtenir le jeton numéroté 2 au nième tirage pour la première fois ».

a- Calculer p_1, p_2, p_3 puis p_n.

b- Calculer la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

PROBLEME:

1°) Soit la fonction h définie sur $\Re_+$ par : $h(x) = e^x - x\,e^x - 1$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- En déduire que $\forall\ x \geq 0\ \ h(x) \leq 0$.

2°) Soit la fonction g définie sur $\Re_+$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α dans $\Re_+$ et que $1.1 < \alpha < 1.2$.

c- En déduire le signe de $g(x)$.

3°) Soit f la fonction définie sur $\Re_+$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\,e^x + 1}$.

a- Montrer que pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x.\,g(x)}{(x\,e^x + 1)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

d- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

e- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (ξ_f) de f au point d'abscisse 0.

4°) a- Montrer que $\forall\ x \in \Re_+$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1).\,h(x)}{x\,e^x + 1}$.

b- En déduire la position de (ξ_f) et (T).

c- Tracer (T) et (ξ_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4\,cm$.

5°) a- Montrer que $\forall\ x \in \Re_+$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. En déduire une primitive F de f.

b-Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (ξ_f), (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6°) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a- Calculer V_0 et V_1.

b- Montrer que $\forall\ n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

a- En déduire que V_n est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

BON TRAVAIL