SERIE n°21

EXERCICE N°1:

Une boîte B_1 contient 3 jetons numérotés : 0 , 0 , 2.

Une boîte B_2 contient 4 jetons numérotés : 1 , 1 , 3 , 4.

1°) On tire au hasard un jeton de chaque boîte et on désigne par X l'aléa numérique qui prend pour valeur le produit des nombres inscrits sur les deux jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de X.

2°) On effectue trois fois le tirage décrit à la question précédente, chaque jeton étant remis dans sa boite après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a- Exactement deux fois un produit supérieur à quatre ?

b- Au plus une fois un produit supérieur à quatre ?

3°) Une épreuve consiste à faire des tirages d'un jeton de la boite B_1, en remettant chaque fois le jeton tiré. On désigne par p_n la probabilité de l'événement :

« Obtenir le jeton numéroté 2 au nième tirage pour la première fois ».

a- Calculer p_1, p_2, p_3 puis p_n.

b- Calculer la somme $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°2:

Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètres) d'une voiture en fonction de sa vitesse v (en kilomètre par heure)

v (km/h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

On note $\overline{\mathrm{v}}$ et $\overline{\mathrm{d}}$ les moyennes respective de v et d.

On note $\mathrm{V}(\mathrm{v})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{d})$ les variances respective de v et d.

On note $\mathrm{cov}(\mathrm{v},\mathrm{d})$ la covariance de v et d.

1°) Calculer $\overline{\mathrm{v}}$, $\overline{\mathrm{d}}$, $\mathrm{V}(\mathrm{v})$, $\mathrm{V}(\mathrm{d})$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{v},\mathrm{d})$.

2°) a-Calculer le coefficient de corrélation entre v et d.

b- Y-a-t-il forte corrélation entre v et d. ?justifier.

3°) Soit Δ la droite de régression de d en v.

On considère q'une équation cartésienne de Δ est : $\mathrm{d} = 1.3\,\mathrm{v} + 8$

Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h.

4°) La vitesse de la voiture est de 140 km/h, lorsque le conducteur, roulant suivant une ligne droite aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres . Pourrait-il alors éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freins.

PROBLEME:

1°) Soit la fonction h définie sur $\Re_+$ par : $h(x) = e^x - x\,e^x - 1$.

a- Dresser le tableau de variation de h.

b- En déduire que $\forall\ x \geq 0\ \ h(x) \leq 0$.

2°) Soit la fonction g définie sur $\Re_+$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α dans $\Re_+$ et que $1.1 < \alpha < 1.2$.

c- En déduire le signe de $g(x)$.

3°) Soit f la fonction définie sur $\Re_+$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x\,e^x + 1}$.

a- Montrer que pour $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x.\,g(x)}{(x\,e^x + 1)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

d- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

e- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (ξ_f) de f au point d'abscisse 0 .

4°) a- Montrer que $\forall\ \ x \in \Re_+$, $f(x) - x = \dfrac{(x+1).\,h(x)}{x\,e^x + 1}$.

b- En déduire la position de (ξ_f) et (T).

c- Tracer (T) et (ξ_f) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4\,cm$.

5°) a- Montrer que $\forall\ \ x \in \Re_+$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. En déduire une primitive F de f.

b-Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (ξ_f), (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6°) $\forall\ \ n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a- Calculer V_0 et V_1.

b- Montrer que $\forall\ \ n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$.

c-En déduire que V_n est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

BONNE CHANCE