<u>Série De Révision n°1</u>

« Nombre Complexe »

EXERCICE N°1:

Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $\left(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$,direct, on considère le point M d'affixe $z = x + iy$.On suppose que dans tout l'exercice que $z \neq 2i$.On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $2i$.

1°) Résoudre les équations :

a- $\dfrac{z-1}{z-2i} = i\ (*)$ b- $\dfrac{z-1}{z-2i} = -1\,(**)$

On appellera C et D les points images des solutions respectivement $(*)$et$(**)$.

2°) On pose $Z = \dfrac{z-1}{z-2i} = X + iY$, X et Y étant des réels.

Déterminer X et Y en fonction de x et y.

3°) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M tels que Z soit réel

Montrer que D appartient à (E).

4°) Montrer que l'ensemble (F) des points M tels que Z soit imaginaire pur ou nul est un cercle privé d'un point, dont on déterminera le centre et le rayon.

Vérifier que C appartient à (F) et représenter l'ensemble (F).

5°) Déterminer et représenter l'ensemble (G) des points M tels que $|Z| = 1$

EXERCICE N°2:

1°) On considère le nombre complexe $a = -4\sqrt{3} - 4i$.

Déterminer le module et un argument de a.

2°) Résoudre dans C l'équation $z^2 = -4\sqrt{3} - 4i$.

(on donnera les solutions sous forme trigonométrique) .

3°) Soit $u = (-1-i) + \sqrt{3}(1-i)$.

a- Calculer u^2.

b- En déduire le module et un argument de u.

c- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ,\ \vec{e_1}\ ,\ \vec{e_2}\right)$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives u ; $\sqrt{3}(1-i)$et $(-1-i)$

Montrer que OBAC est un rectangle .

EXERCICE N°3:

1°) a- Résoudre dans l'ensemble C l'équations : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous la forme exponentielle.

c- Résoudre dans l'ensemble C l'équations : $z^4 - \sqrt{3}z^2 + 1 = 0$.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans C l'équation : $(E) : z^2 - 2\sin\theta\, z + 1 = 0$.

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans l'ensemble C l'équations $z^4 - 2\sin\theta\, z^2 + 1 = 0$.

EXERCICE N°4:

Soit θ un réel de l'intervalle $[0\,,2\pi]$.

1°) a- Vérifier que $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

b- Résoudre dans l'ensemble C l'équations : $Z^2-2iZ+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2°) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

a- Déterminer et construire l'ensemble ζ_1 décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0\,,2\pi[$.

b- Calculer l'affixes du milieu I du segment $[M_1M_2]$.

c- Déduire l'ensemble ζ_2 décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0\,,2\pi[$. Construire ζ_2.

3°) a- Montrer que $\left(M_1M_2\right)^2=8\left(1-\sin\theta\right)$.

b- Déduire la valeur de θ pour la quelle M_1M_2 est maximale

EXERCICE N°5:

Soit m un réel non nul.

1°) Résoudre dans C l'équation : $z^2-2iz-\left(1+m^2\right)=0$.

2°) Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z)=z^3-3iz^2-\left(3+m^2\right)z+i\left(1+m^2\right)$.

a- Vérifier que $f(i)=0$;en déduire une factorisation de $f(z)$.

b- Résoudre dans C l'équation $f(z)=0$.

3°) le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,,\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

On considère les points A , M' et M'' d'affixes respectives $i\,, i+m$ et $i-m$.

a- Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M'']$.

b- Montrer que le triangle $OM'M''$ est isocèle.

c- Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M''$soit équilatéral.

EXERCICE N°6:

Le plan Complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et ς le cercle trigonométrique et t l'affixe d'un point M de ς ; t est un nombre complexe ayant pour argument un réel $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1°) Soit $u=t^3$ et $v=2t$.Ecrire chacun des nombre u et v sous la forme trigo.

2°) Soit $w=2t-t^3$ et A , B et C les points d'affixes respectives u , v et w.

a- placer, dans le plan P, les points A , B et C dans le cas où $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

b- Déterminer les réels α pour lesquels les points O ; A et B sont alignés.

3°) On suppose dans la suite , que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a- Quelle est la nature du quadrilatère OABC.

b- Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

EXERCICE N°7:

Pour tout nombre complexe non nul z, On pose $w = z + \frac{4}{z}$.

1°) Soit θ un réel donné.

a- Résoudre dans C l'équation : $z + \frac{4}{z} = 4\cos\theta$.

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

Dans tout la suite le plan complexe est rapporté à un R.O.Ndirect $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2°) Atout nombre complexe z on associe le point M d'affixe z.
Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que le nombre complexe w est un réel.

3°) Soient A , B et C les points d'affixe respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Les points A , B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

b- Vérifier que pour tout valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ les points A , B et C appartiennent à l'ensemble E.

c- Montrer que pour tout valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le quadrilatère OABC est un losange.

d- Pour quelle valeur de θ ce quadrilatère est-il un carré ?

EXERCICE N°8:

On Considère les nombres complexes $\alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$.

1°) Ecrire α et β sous la forme exponentielle.

2°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

a- Résoudre dans C l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.On désignera par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2 l'autre solution.

b- Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

3°) Déterminer θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

EXERCICE N°9:

1°) Résoudre dans l'ensemble C l'équations : $z^2 - (1+i)z + i = 0$.

2°) θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère l'équation dans C :

$$E_\theta : z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta . z + e^{2i\theta} = 0$$

a- Vérifier que 1 est une solution de E_θ.

b- En déduire l'autre solution de E_θ.

3°) le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$
on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et $e^{2i\theta}$.

a- Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b- Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un losange.

c- Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'air du losange $OACB$ égale $\frac{1}{2}$

BONNE CHANCE