Série De Révision n °2

« Espace »

EXERCICE N°1:

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1°) On considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,0,1)$ et $C(1,1,0)$.

a- Vérifier que A , B et C ne sont pas alignés.

b- Montrer qu' une équation cartésienne du plan P passant par A , B et C est $x+y+z-2=0$.

c- Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et tangente à P. On notera I le point de contact de S et P.

2°) $\alpha \in \Re$; on considère les points $E\left(-\alpha,\frac{2}{\sqrt{3}},\alpha\right)$ et $F\left(-\alpha,-\frac{2}{\sqrt{3}},\alpha\right)$.

Soit S_α l'ensemble des points M de E tel que : $ME^2+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{EF}=0$.

a- Montrer que S_α est une sphère de diamètre $[EF]$.

b- Montrer que pour tout réel α , S_α est tangente à P.

c- On notera J le point de contact de S_α et P.
Déterminer α pour que $IJ=\sqrt{2}$.

EXERCICE N°2:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$ et $H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

1°) Vérifier que les trois points A , B et C déterminent un plan P.

2°) a- Vérifier que $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b- En déduire qu' une équation cartésienne du plan P est $x+y+z-2=0$.

3°) Vérifier que l'on a les deux résultats suivants :

a- Le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan P.

b- Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°) Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et qui tangente au plan P.

5°) Soit m un paramètre réel tel que $0<m<2$ et soit $P_m : x+y+z-m=0$.

a- Vérifier que P_m et P son strictement parallèles.

b- Montrer que l'intersection de S et de P_m est un cercle noté ς_m.

c- Déterminer les coordonnés du centre du ς_m et préciser son rayon.

EXERCICE N°3:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 , 2 , -1) et B(2 , 1 , 1) .

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

2°) Soit P_m le plan d'équation $x + y + m - 3 = 0$ où $m \in \Re$.

a- Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m.

b- Pour quelle valeur de m la droite (AB) est-elle incluse dans le plan P_m.

c- Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q.

3°) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m. Déterminer les valeurs de m pour que ABB'A' soit un carré.

EXERCICE N°4:

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points A(-1 , -1 , 1) ; B(-1 , 2 , -2) et le plan P dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$.

1°) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P.

2°) Soit α un réel et S_α l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0.$$

a- Montrer que ,pour tout réel α, S_α est une sphère de centre I_α et de rayon $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$.

b- Montrer que ,quand α varie dans $\Re$, I_α décrit la droite (AB).

3°) Etudier suivant les valeurs de α, les positions relatives de S_α et du plan P.

4°) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $S_{1-\alpha}$.

a- Montrer que I est le milieu du segment $[I_\alpha, I_{1-\alpha}]$.

b- En déduire que les sphères S_α et $S_{1-\alpha}$ sont symétrie par rapport au point I.

EXERCICE N°5:

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points $A(1,1,1)$, $B(3,1,0)$ et $C(-1,0,1)$.

1°) a- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- Soit P le plan déterminé par les points A, B et C
Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

c- Soit Q le plan dont une équation cartésienne est $2x + y + 2z + 1 = 0$.
Montrer que le plan P et Q sont sécants ?

2°) Soit t un réel et le point $I_t(1, -1, t)$.

a- Vérifier que la distance du point I_t au plan P est égale à la distance du point I_t au plan Q.

b- Montrer que si $t = -1$, alors le point I_t appartient à P et Q.

c- Montrer que si $t \neq -1$, alors il existe une sphère S_t de centre I_t et tangente à la fois aux plans P et Q. Quel est son rayon en fonction de t ?

3°) Soit $t = 2$. Déterminer les coordonnées du point H de contact de la sphère S_2 avec la plan Q.

Bonne chance