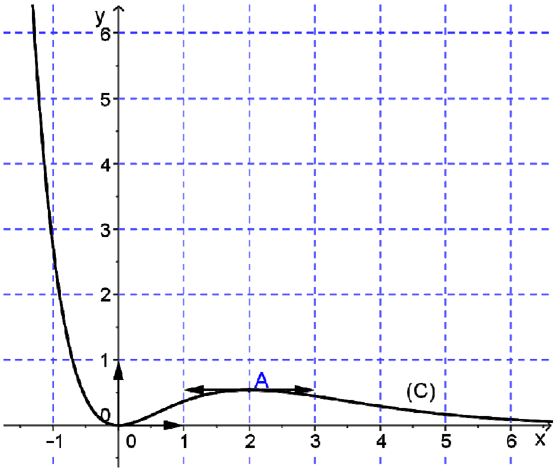
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1 (Principale 2008)

I) On a représenté ci-dessous la courbe (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$.
- Seulement deux tangentes horizontales ; l'une au point O et l'autre au point $A(2, 4e^{-2})$



En utilisant le graphique :

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

II) On suppose que la fonction f et définie par : $f(x) = x^2e^{-x}$. On note f' la fonction dérivée de f.

1) Vérifier que, pour tout réel , $f'(x) = 2xe^{-x} - f(x)$.

2) Soit $I = \int_0^2 xe^{-x}\,dx$ et $J = \int_0^2 f(x)\,dx$

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 1 - 3e^{-2}$.

b) En utilisant II – 1); montrer que $J = 2I - \int_0^2 f'(x)\,dx$

c) En déduire la valeur de J et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2 (Contrôle 2008)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer (C).

4) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique x_n dans $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que $x_n = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n}$

Exercice 3 **(Principale 2009)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = 1 + e^x - xe^x$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1) On donne ci- contre le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

a) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[0\,,+\infty[$ réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur $]-\infty\,,2[$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$, une solution unique α.

c) Vérifier que $1 < \alpha < 1{,}5$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat .

b) Etudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Tracer $(\mathcal{C})$ et Δ.

3) On note g^{-1} la fonction réciproque de g et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative. Tracer $(\mathcal{C}')$

4) a) Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = x + (2 - x)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

c) En déduire que $\displaystyle\int_1^2 g^{-1}(x)\,dx = e - 2$

Exercice 4 **(Contrôle 2009)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x})$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f.

c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x)$.

d) En déduire que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (ζ) en $-\infty$.

Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et Δ.

e) Tracer $(\mathcal{C})$ et Δ.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α.

b) Vérifier que $0 < \alpha < 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

b) En déduire que tout $x \geq 0$; $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

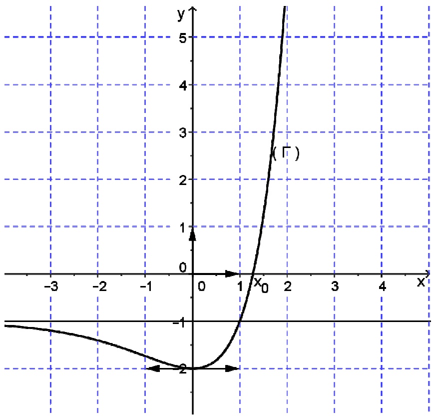
Exercice 5 **(Principale 2010)**

1) La courbe (Γ) ci-dessous est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.
- La courbe (Γ) admet une seule tangente horizontale.
- La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses $(O, \vec{\imath})$ en un unique point x_0.

En utilisant le graphique :



a) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

b) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\alpha x + \beta)e^x - 1$ où α et β sont deux réels.

a) Exprimer $g(0)$ et $g'(0)$ en fonction de α et β.

b) Déduire, en utilisant 1)a), que pour tout réel x, $g(x) = (x - 1)e^x - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{x}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Justifier que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{\jmath})$ au voisinage de $+\infty$

4) a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que $f(x_0) = \frac{1}{x_0 - 1}$

d) Tracer $(\mathcal{C})$. (On prendra $x_0 = 1{,}2$).

Exercice 6 **(Contrôle 2010)**

I)

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$

par $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

.

1) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0{,}75 < \alpha < 1$.

2) Déterminer, suivant les valeurs de x ; le signe de $g(x)$.

II)

Soit la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$, On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ: $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et Δ.

2) a) Montrer que pour tout $\in\,]0\,,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) tracer $(\mathcal{C})$ et Δ.

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

<u>Exercice 7</u> **(Principale 2011)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = (1 + x)e^{-x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout réel , $f'(x) = -xe^{-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par A_n l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les axes du repère et la droite d'équation $x = n$.

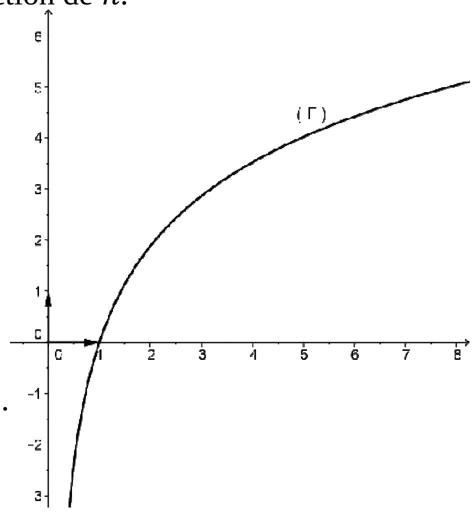
a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer A_n en fonction de n.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} A_n$

<u>Exercice 8</u> **(Contrôle 2011)**

La courbe (Γ) ci-contre est celle d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0\,,+\infty[$.

On sait que (Γ) n'admet aucun extremum.



1) a) Par lecture graphique, donner le signe de g sur $]0\,,+\infty[$.

b) En déduire que, pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$, $(x - 1)g(x) \geq 0$.

2) La fonction g est définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 2\ln x + \frac{x-1}{x}$

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2\ln(x) + x - 1$ et on désigne par (C_f) la courbe représentative de f.

a) Montrer que, pour tout $\in]0\,,+\infty[$, $f'(x) = (x-1)g(x) + 1$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit (T) la tangente à la courbe (C_f) au point I d'abscisse 1.

a) Vérifier que (T) a pour équation : $y = x - 1$.

b) Etudier la position relative de (C_f) et (T).

c) Tracer la courbe (C_f).

Exercice 9 **(Principale 2012)**

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $f(x) = 2 - x + \ln x$.

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

1) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1\,,+\infty[$ une unique solution α et que : $\ln\alpha = \alpha - 2$

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1\,,+\infty[$.

2) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2 + \ln U_n \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $1 \le U_n \le \alpha$

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

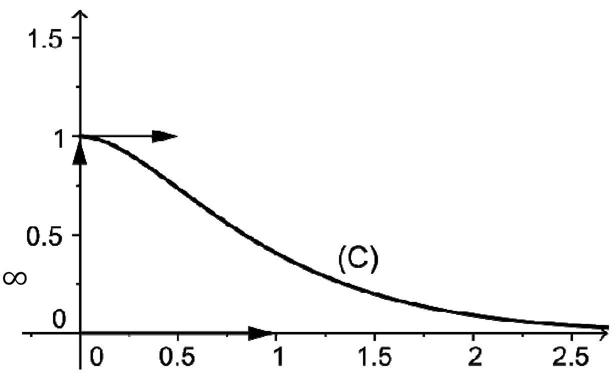
Exercice 10 **(Principale 2012)**

On a représente ci-contre dans un repère orthonormé la courbe (C) d'une fonction f définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0\,,+\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

* admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$

* atteint son maximum au point d'abscisse 0.



1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite en 0)

b) Montrer que f est une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f.

On note β l'abscisse du point d'intersection des deux courbes (C) et (C').

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

a) En utilisant 1) a) montrer que pour tout x de $[0\,,+\infty[$; $f(x) = (2x+1)e^{-2x}$

b) Soit $I = \int_0^{\beta} (2x+1)e^{-2x}\,dx$

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I = 1 - (\beta + 1)e^{2\beta}$.

c) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 1$.

Hachurer (E) et déterminer $\mathscr{A}$ en fonction de β.

Exercice 11 **(Contrôle 2012)**

1) Soit la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$. On note (C) sa courbe représentative.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que, pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[\,;\ g'(x) = \frac{1+x}{x^2}$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2) a) Donner une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (C) et (T).

3) Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = -1 + (x-1)\ln x$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,,+\infty[$ exactement deux solutions notées α et β. (On prendra $\alpha < \beta$).

b) Justifier que $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$ et que $2{,}2 < \beta < 2{,}3$.

4) Soit (E) la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations α et β.

On désigne par A l'aire de (E).

a) Hachurer (E).

b) Vérifier que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[\,;\ f'(x) = g(x)$.

c) Montrer que $A = \int_1^{\alpha} g(x)\,dx + \int_1^{\beta} g(x)\,dx$

d) En déduire la valeur de A.

Exercice 12 **(Principale 2013)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-\frac{1}{2}x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Interpréter graphiquement le résultat.

2) Déterminer les coordonnées des point E et F intersection de la courbe (C) avec respectivement, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion K dont on déterminera les coordonnées.

c) Tracer la courbe (C).

4) On pose $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}\,dt$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_{-2}^{2} (t+2)^n e^{-t}\,dt$

a) Montrer que : $I_0 = e^2 - \frac{1}{e^2}$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{4^{n+1}}{e^2}$

c) Calculer I_1 et I_2.

5) On désigne par (D) le domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

a) Hachure le domaine (D).

b) Soit $\mathcal{V}$ volume du solide de révolution engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses. Calculer $\mathcal{V}$.

Exercice 13 **(Contrôle 2013)**

1) Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

a) Montrer que : pour tout $x \geq 1$; $f(x) \leq x$ et que pour tout $0 \leq x \leq 1$; $f(x) \geq x$.

b) Vérifier que pour tout $x \in [0, +\infty[$;$f'(x) = (1-x)e^{1-x}$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 14 **(Contrôle 2013)**

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln x & si \quad x \in]0, +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est dérivable à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ Déterminer la nature de la branche infinie de (C).

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = -4x \ln x$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $(O, \vec{\imath})$.

5) Construire (C). On précisera en particulier la tangente à (C) au point O.

6) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \sqrt{e}$.

a) En utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$\int_{\alpha}^{\sqrt{e}} x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha^3 \ln \alpha + \frac{1}{18} e\sqrt{e}$$

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les axes des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \sqrt{e}$. Calculer $A(\alpha)$.

c) Montrer que $\lim_{\alpha \to 0^+} A(\alpha) = \frac{2}{9} e\sqrt{e}$.

__Exercice 15__ **(Principale 2014)**

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x)^2 + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) En utilisant l'égalité : $x\ln^2 x = \left(\sqrt{x}\ln x\right)^2$ pour tout $x \in]0\,,+\infty[$; montrer que $\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$

b) En déduire que f est continue à droite en 0.

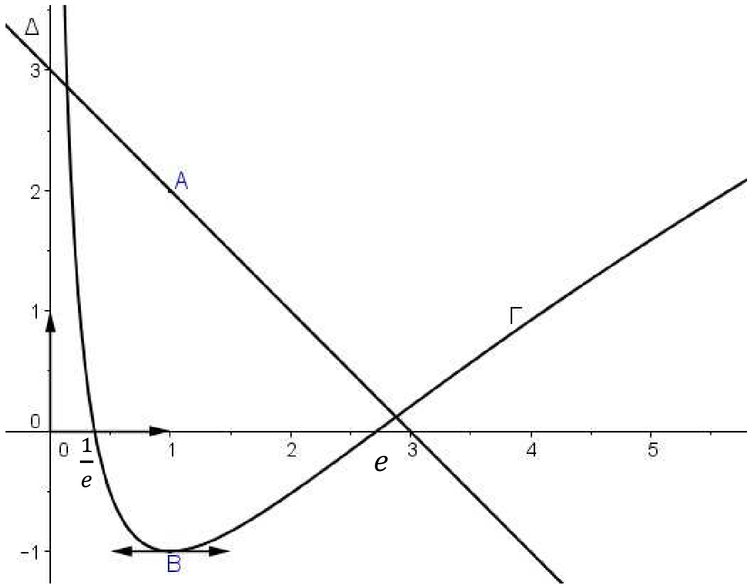
c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3) On a tracé ci-contre dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

∗ la courbe Γ de la fonction dérivée f' de f.

∗ la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(1\,,2)$.

On sait que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$ et e et qu'elle admet au point $B(1\,,-1)$ une tangente horizontale.



Par lecture graphique :

a) Déterminer le signe de f' sur $]0\,,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

4) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans le repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

5) Soit $0 < \alpha < \frac{1}{e}$

On désigne par A_α l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{e}$

Montrer que $A_\alpha = 1 + \frac{4}{e} - f(\alpha)$ et en déduire $\lim_{\alpha\to 0^+} A_\alpha$