4°sc. T E C H.
S M A A L I.

Liste n° : 9

EXERCICE N°1.

Pour tout nombre complexe $z \neq 1$ on pose $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$, on considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les points A, B, M et M' d'affixes respectives : 1 ; (-1) ; z et z'.

1) Montrer que $|z'| = 1$ et interpréter géométriquement le résultat.

2) a) Calculer $U = \dfrac{z'-1}{z-1}$ en fonction de z et $\overline{z}$

b) En déduire que U est réel.

c) Montrer alors que les points A, M et M' sont alignés.

3) Montrer que $V = \dfrac{z'+1}{z'-1}$ est imaginaire pur et déduire que $(AM') \perp (BM')$.

4) Déduire une construction de M' pour un point M donné.

EXERCICE N°2.

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit (D) l'ensemble des points M de (P) d'affixe z vérifiant :

$$|z-3i| = |z+2-i| \qquad (1)$$

1. En écrivant $z = x + iy$, montrer par le calcul que (D) est une droite dont on donnera une équation.

2. On se propose dans cette question de vérifier le résultat du 1.

Soit A le point d'affixe $3i$ et B le point d'affixe $-2 + i$.

a) Placer A et B dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) En interprétant géométriquement la relation (1) à l'aide des points A et B, redémontrer que (D) est une droite. Tracer (D).

c) Retrouver alors par le calcul l'équation de (D) obtenue au 1.

EXERCICE N°3.

Soit le nombre complexe $z \neq -1$; on pose $z' = \dfrac{-iz-2}{z+1}$ et $f : M(z) \mapsto M'(z')$.

On donne les points $A(a=-1)$, $B(b=2i)$ et $C(c=-i)$.

1°) Soit $f(C)=C'$ déterminer $z_{C'}$ affixe du point C' sous la forme algébrique.

2°) Déterminer z_D affixe du point D qui a pour image le point D' / $z_{D'} = \dfrac{1}{2}$.

3°) Soit, $w = \dfrac{z-2i}{z+1}$. a- Montrer que : $z' = -iw$.

b- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ / w est imaginaire pur.

En déduire l'ensemble des points $M(z)$ / z' est réel.

c- Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ / $|w|=1$

En déduire l'ensemble des points $M(z)$ / $|z'|=1$.

EXERCICE N°4.

le plan complexe est rapporté à un R.O.N direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2°) A tout nombre complexe z on associe le point M d'affixe z.

Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que le nombre complexe $w = z + \dfrac{4}{z}$ est un réel.

3°) Soient A, B et C les points d'affixe respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a- Placer, pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b- Vérifier que pour toute valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ les points A, B et C appartiennent à l'ensemble E.

c- Montrer que pour toute valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ le quadrilatère OABC est un losange.

d- Pour quelle valeur de θ ce quadrilatère est-il un carré ?