SERIE N° 12

EXERCICE N°1 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

1°) Etudier les variations de f ?

2°) a- Montrer que f est impaire ?

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente au point O .

c- Tracer ξ_f dans un repère Orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Montrer que f est une bijection de $\Re$ sur un intervalle J à préciser.

4°) Déterminer pour chaque $x\in J$ l'expression de $f^{-1}(x)$.

5°) a) Déterminer les primitives de f .

b) Déterminer la primitive de F de f qui s'annule en 0.

EXERCICE N°2 :

Soit la fonction g définie sur $\Re$ par : $g(x)=e^x(2-x)-2$

1°) Dresser le tableau de variation de g ?

2°) a- Monter que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]1\ ,\ +\infty[$ une solution unique α

b- Calculer $g(0)$.Etudier alors le signe de $g(x)$.

3°) Soit la fonction f définie sur $\Re$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e^x-1} & si \quad x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

a- Montrer que f est continue et dérivable en 0 .

b- Montre que $f'(x)=\frac{x\,g(x)}{(e^x-1)^2}$.

4°) a- Montrer que $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c- Dresser le tableau de variation de f et Tracer ξ_f .

EXERCICE N°3 :

On considère la suite des intégrales :

$$I_0=\int_0^1\frac{dx}{e^x+1} \qquad \text{et} \qquad I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{e^x+1}dx \quad \text{où } n\in\mathbb{N}^*.$$

1°) a- Calculer I_1 et I_0+I_1 ; en déduire I_0.

b- pour tout entier naturel n calculer $I_{n+1} + I_n$.

2°) a- Montrer sans calcule que la suite (I_n) est croissante.

b- Prouver que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2} e^{nx}$.

3°) a- En déduire un encadrement de I_n.

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_n}{e^n}$.

4°) a- Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

b- En déduire la valeur de $J = \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}$.

c- A l'aide d'une intégration par parties déduire $K = \int_0^1 \frac{x\,e^x}{(e^x+1)^3}\,dx$.

EXERCICE N°4 :

Soit f définie sur $\Re$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité :4 cm).

1°) Déterminer l'aire $S(\lambda)$, de la surface délimité par la courbe ξ_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 0$).

2°) Déterminer la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$; et interpréter géométriquement ce résultat.

EXERCICE N°5:

Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + 3 + \frac{2(1-\log x)}{\sqrt{x}}$ et ξ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a- Montrer que la droite $D : y = x + 3$ est une asymptote à la courbe ξ_f.

b- Etudier la position de ξ_f et D.

2°) Déterminer l'aire S de la surface comprise entre ξ_f et D et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ avec $\lambda \geq 1$.

BON TRAVAIL