

SERIE N° 4

EXERCICE N°1 :

Calculer les limites suivantes si elle existent :

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{9x^2 - 8x + 6} - x$; b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 8x + 6} - x$; c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 3} + x$
d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x}$; e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + ax}$ ou $a \in \mathbb{R}$; f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 5}}{2x}$
g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 + x - 1} + x$; h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x||x - 2|}{x(x^2 - x - 2)}$; i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 2} - 2}{x - 1}$
j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x + 1}}{x - 1}$; k) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 + x^2}}{x - 1}$; l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x||x - 2|}{x(x^2 - x - 2)}$

EXERCICE N°2 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin x - \sin 2x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \sin 2x\right)$; e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(3 + \cos x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x}$

EXERCICE N°3 :

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$; puis étudier la continuité de f en 0.

EXERCICE N°4 :

Soit la fonction f défini par : $\begin{cases} 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3°) Etudier la continuité de f en 0.

EXERCICE N°5 :

Soit la fonction f défini par :
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + \pi x + \text{Cos}\pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 - x + \pi & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de f en 1.

2°) a- Montrer que $\forall x > 1 ; f(x) \geq \sqrt{x^2 - 1} + \pi x$.

b- Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3°) a- Etudier la dérivabilité de f sur $]1, +\infty[$.

b- Prouver que $\forall x > 1 ; f'(x) > 0$.

4°) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (1)^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$.

Interpréter géométriquement le résultat trouvé .

5°) Dresser le tableau de variations de f .

6°) L'équation $f(x) = 0$ possède -t-elle des solutions dans \mathfrak{R} ?

7°) Soit $h : [0, \pi] \rightarrow \mathfrak{R} ; x \mapsto h(x) = f(3 + \text{Sin}x)$.

a- Etudier la dérivabilité de h sur $[0, \pi]$.

b- Dresser le tableau de variations de h .

EXERCICE N°6 :

Soit A et B deux points d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.

Soit $f : P - \{A\} \rightarrow P ; M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{z - i}{z - i\sqrt{3}}$

1°) Dans cette question on prend $z = 1$.

a- Donner la forme algébrique de z' .

b- Donner la forme trigonométrique de z' .

c- Déduire les valeurs de $\text{Cos} \frac{\pi}{12}$ et $\text{Sin} \frac{\pi}{12}$.

d- Montrer que z'^{1998} est un nombre imaginaire pur.

2°) Soit l'ensemble E des points $M(z)$ tel que $\left| \frac{z - i}{z - i\sqrt{3}} \right| = 1$,Déterminer cet ensemble

3°) Montrer que $\forall z \in C - \{i, i\sqrt{3}\}$ on a $\arg z' \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$

BON TRAVAIL