SERIE N° 4

« Devoir n°1 »

EXERCICE N°1 : *(6 pts)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.

$A\ ,B\ ,\ M$ et M' sont les points d'affixes respectives: $2\ ;\ 2i\ ,\ z\neq 2$ et $z'=\dfrac{iz+2}{2z-4}$

1°) On prend, dans cette question, $z=1+i$

Donner la forme algébrique ainsi que l'écriture trigonométrique de z'.

2°) a- justifier les égalités suivantes : $|2z-4|=2MA$ et $|iz+2|=MB$

b- Caractériser l'ensemble $E=\left\{M(z)\ telque\ \ |z'|=\dfrac{1}{2}\right\}$.

3°) a- Montrer que pour $z\in C-\{2\ ,2i\}$, on a : $\arg(z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(\dfrac{z-2i}{z-2}\right)\ [2\pi]$.

b- Exprimer $\arg(z')$ à l'aide de $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})$

c- Caractériser l'ensemble $F=\{M(z)\ telque\ z'\ est\ imaginaire\ pur\}$.

EXERCICE N°2 : *(5 pts)*

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}+\sqrt{x^2-9} & si\ x\in[3\ ,\ +\infty[\\[2mm] \dfrac{2\sin(x-3)}{x^2-3x} & si\ x\in\left]-\infty\ ,\ 0\right[\cup\left]0\ ,\ 3\right[\end{cases}$

1°) Donner le domaine de définition de f .

2°) Montrer que f est continue sur $[3\ ,\ +\infty[$

3°) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; f est-elle continue en 3 ?

b- Donner le domaine de continuité de f

4°) a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b- Montrer que pour $x<0$, on a : $\dfrac{-2}{x^2-3x}\leq f(x)\leq\dfrac{2}{x^2-3x}$; En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

EXERCICE N°3 : *(4 pts)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ,1]$ par $f(x)=-x^3+\sqrt{1-x}$.

1°) Montrer que f est continue sur $]-\infty\ ,1]$.

2°) Etudier la monotonie de f

3°) Déterminer l'image de $]-\infty\ ,1]$ par f

4°) a- Monter que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0\ ,\ 1[$.

b- Donner un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE N°4 : *(5 pts)*

Soit u la suite définie sur $\Re$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$

1°) a- Montrer que $\forall\ n \in \mathrm{N}$, $u_n < 2$.

b- Montrer que u_n est croissante.

c- En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit v la suite définie sur $\Re$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

a-Montrer que v est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

b- En déduire v_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c- Exprimer u_n à l'aide de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

BON TRAVAIL