

SERIE N° 6

EXERCICE N°1 :

On considère dans C l'équation $(E): z^2 - (3 - i)z + 4 = 0$.

1°) a- Résoudre dans C l'équation (E) ; on note z_1 et z_2 les solutions / $\text{Im}(z_1) > 0$
b- Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2°) Soit dans C l'équation $(E'): 3z^3 + (-9 + i)z^2 + (14 + 6i)z - 8i = 0$.

a- Vérifier que $z_0 = \frac{2}{3}i$ est une solution de (E') .

b- Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que $\forall x \in C$ on a :

$$3z^3 + (-9 + i)z^2 + (14 + 6i)z - 8i = (z - z_0)(az^2 + bz + c).$$

c- Résoudre alors l'équation (E') .

3°) Le plan est rapporté à un R.O.N direct, on considère les points A , B et C

d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = \frac{2}{3}i$.

a- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ et montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

b- En déduire la nature du triangle ABC .

c- Ecrire une équation cartésienne du cercle ζ circonscrit au triangle ABC .

EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur \mathfrak{R} par : $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$.

On désigne par ξ_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Dresser le tableau de variations de f .

2°) a- Montrer que la droite $\Delta : y = -2x + 1$ est une asymptote à ξ_f .

b- étudier la position de ξ_f par rapport à Δ .

c- Tracer ξ_f et Δ dans le même R.O.N (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3°) a- Montrer que f réalise une bijection de \mathfrak{R} sur un intervalle J à préciser.

b- Construire ξ_f et $\xi_{f^{-1}}$ dans le même R.O.N (O, \vec{i}, \vec{j}) .

c- Montrer que $\forall x \in J$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{2(x-1)}$.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathfrak{R} une solution unique α

et que $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

5°) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = 1 + f'(\cos x)$.

a- Vérifier que $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}$ et que $g'(x) = \frac{-3 \sin x}{(\sqrt{\cos^2 x + 3})^3}$.

b- Montrer que g réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle I à préciser.

c- Déterminer le domaine D de la dérivabilité de g^{-1} et montrer que :

$$\forall x \in D, \quad (g^{-1})'(x) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2 - 1)\sqrt{1 - 4x^2}}.$$