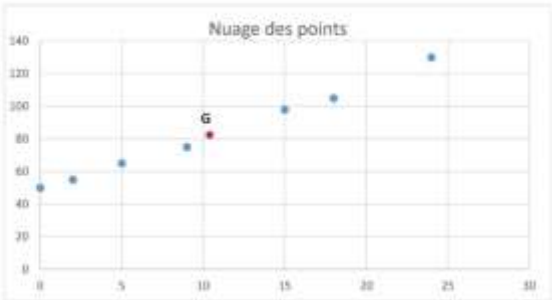
MATHÉMATIQUES
Section : Economie et Gestion
Session de contrôle 2021

Exercice N°1 :

1) a)



b) Le nuage permet d'envisager un ajustement affine car les points sont allongés autour d'une droite.

c) On a : $\overline{X} = \frac{1}{7}\sum x_i \cong 10{,}4$; $\overline{Y} = \frac{1}{7}\sum y_i \cong 82{,}6$. Par suite $G(10{,}4\,;82{,}6)$

2) a) $r = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \cong 0{,}998$

b) $a = \frac{\mathrm{Cov}(T,Y)}{V(T)} = 3{,}298$; $b = \overline{Y} - a\,\overline{X} = 48{,}176$. $D: y = 3{,}298\,x + 48{,}176$

3) Pour l'année 2022, on a : $x = 27$

Donc le prix du m^2 en dinars est $y = 3{,}298 \times 27 + 48{,}176 = 137{,}222$

Le prix de vente à un dinars près de 50 m^2 de tissus est 137,222x50 = 6861 DT

Exercice N°2 :

1) a) L'ordre du graphe (T) est égal à 7.

b) Le graphe (T) n'est pas complet car les deux sommets A et B ne sont pas adjacents

2) a)

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	2	3	3	4	2	4

b) Puisque les degrés des sommets du graphe (T) ne sont pas tous pairs, alors le graphe (T) n'est pas un cycle eulérien .

c) Puisque le graphe (T) admet exactement deux sommets de degré impairs qui sont C et D, alors (T) admet une chaine eulérienne .

Exemple : $C \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow D$.

3) a) Notons $\gamma(T)$ le nombre chromatique du graphe (T) . On a :

D'une part le plus grand degré de tous les sommets est 4, alors
$\gamma(T) \leq 4+1 \iff \gamma(T) \leq 5$
D'autre part l'ordre du plus grand sous graphe complet est 3 alors $\gamma(T) \geq 3$
Par suite $3 \leq \gamma(T) \leq 5$

b) On utilise l'algorithme de Welsh et Powel

Sommet	A	E	G	C	D	B	F
Degré	4	4	4	3	3	2	2
Couleurs	C_1	C_2	C_3	C_2	C_3	C_1	C_1

Par suite $\gamma(T) = 3$.

4) a) $$M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Le nombre de chemins de longueur 3 reliant les sommets B et E est le terme situé à l'intersection de deuxième ligne et la colonne 5 (a_{25}) de la matrice M^3 .
Donc il y a 4 chemins de longueur 3 reliant les sommets B et E qui sont :

$B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$, $B \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow E$, $B \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow E$, et $B \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow E$

Exercice N°3 :

I) $Q = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 20 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

1) $$Q \times P = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 20 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \times 5 + 30 \times 2,5 + 10 \times 4 \\ 20 \times 5 + 10 \times 2,5 + 40 \times 4 \\ 30 \times 5 + 20 \times 2,5 + 30 \times 4 \end{pmatrix}$$

Par suite $Q \times P = \begin{pmatrix} 215 \\ 285 \\ 320 \end{pmatrix}$

2) a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{vmatrix}$

$= 20 \times \begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} - 20 \times \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} + 15 \times \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 5 & 32 \end{vmatrix}$

$= 1800 \neq 0$, donc la matrice A est inversible

b) $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1800 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{pmatrix}$

On a : $A \times \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} = 1800\, I_3$

Donc la matrice inverse de A est : $A^{-1} = \frac{1}{1800} \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix}$

II) 1) On a :

- Le coût mensuel de M_1 est $(20 + 20 + 30) \times 5 = 350$ milles dinars
- Le coût mensuel de M_2 est $(30 + 10 + 20) \times 2{,}5 = 150$ milles dinars
- Le coût mensuel de M_3 est $(10 + 40 + 30) \times 4 = 320$ milles dinars

Par suite le coût mensuel total est égal à (350+150+320) = 820 milles dinars

2) a) $(S): \begin{cases} \frac{20\times5x}{100} + \frac{30\times25y}{100} + \frac{10\times4z}{100} = 6 \\ \frac{20\times5x}{100} + \frac{10\times25y}{100} + \frac{40\times4z}{100} = 7 \\ \frac{30\times5x}{100} + \frac{20\times25y}{100} + \frac{30\times4z}{100} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} 20x + 15y + 8z = 120 \\ 20x + 5y + 32z = 140 \\ 15x + 5y + 12z = 80 \end{cases}$

b) $(S) \Leftrightarrow A \times X = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$

$\Leftrightarrow X = \frac{1}{1800} \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 120 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Conclusion : Le prix de de M_1 augmente de 2%, le prix de de M_2 augmente de 4% et le prix de de M_3 augmente de 2,5%.

3) Le coût mensuel de M_1 après hausse est $350 \times \left(1+\frac{2}{100}\right) = 357$ milles dinars

Le coût mensuel de M_2 est $150 \times \left(1+\frac{4}{100}\right) = 156$ milles dinars

Le coût mensuel de M_3 est $320 \times \left(1+\frac{2,5}{100}\right) = 328$ milles dinars

Exercice N°4 :

1) a) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

b)

x	$-\infty$ α	β	$+\infty$
Position relative de (Γ) et (Δ)	(Γ)est au dessous (Δ)	(Γ) est au dessus de (Δ)	(Γ)est au dessous de (Δ)

2) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\ln(x+1) - (x+1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} (x+1)\left(4 \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} - 1\right) = -\infty$$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$

b) f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$;

$f'(x) = \frac{4}{x+1} - 1 = \frac{4-(x+1)}{x+1} = \frac{3-x}{x+1}$

c)

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$4\ln4 - 4$	$\searrow$	$-\infty$

3) Pour tout $x \geq 0$; $f(x) = 4\ln(x+1) - (x+1) = g(x) - h(x)$

4) Soit x le nombre d'appareils fabriqués en une journée, $g(x)$ la recette journalière et $h(x)$ le cout de fabrication journalier

a) Le bénéfice est maximal pour $x = 3$, donc l'usine doit fabriquer exactement 3 appareils par jour pour assurer un bénéfice maximal, ce bénéfice est

f(3) x1000 dinars = 1545 dinars .

b) Pour x = 7, on a $f(7) \succ 0$, donc c'est rentable de fabriquer 7 appareils par jour.

c) L'usine devient perdante pour $f(x) < 0$ et $x \geq 1$, c'est-à-dire $g(x) < h(x)$ et $x \geq 1$

Donc la courbe (Γ) est dessus de la droite (Δ), c'est-à-dire $x \geq 8$.

A partir de 8 appareils fabriqués par jour, l'usine devient perdante.