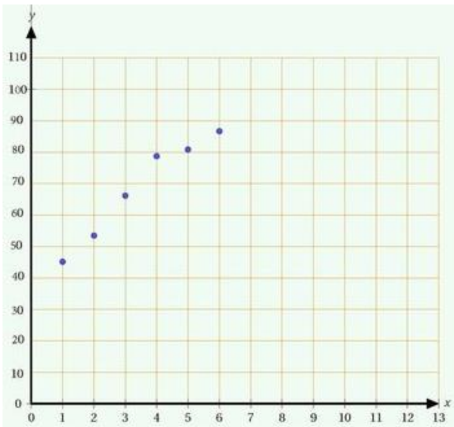
MATHÉMATIQUES
Section : Economie et Gestion
Session principale 2022

Exercice 1 :

1) a) Nuage des points.



b) Les points du nuage sont allongés autour d'une droite ainsi un ajustement affine entre x et y est justifié.

2) a) a = 8,64 et b = 38,26 donc une de la droite de régression est D : $y = 8{,}64x + 38{,}26$

b) Le rang de l'année 2022 est x = 8 donc $y = 8{,}64\times 8 + 38{,}26 = 107{,}38$ MD.

3) On a : $y = 41{,}68e^{0{,}13x}$.

Pour x = 8 on a : $y = 41{,}68\times e^{0{,}13\times 8} = 117{,}92$MD

4) L'ajustement exponentiel est le plus pertinent car il donne un résultat plus proche de 114,14MD.

Exercice 2 :

1) a) $\det(M_\alpha) = 5\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \alpha\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\times(6-4) - \alpha\times(12-24) + 1\times(4-12)$

$= 10 + 12\alpha - 8 = 12\alpha + 2$

b) M_α est inversible ssi $\det(M_\alpha) = 12\alpha + 2 \neq 0$ ssi $\alpha \neq -\dfrac{1}{6}$.

2) a) $A\times B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 12 & -8 \\ -11 & 9 & 19 \\ 14 & -16 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} = 50\times I_3$.

b) On a : $A\times B = 50\times I_3$ sig $A^{-1} = \dfrac{1}{50}\times B$

Par suite $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{25} & \dfrac{6}{25} & -\dfrac{4}{25} \\ -\dfrac{11}{50} & \dfrac{9}{50} & \dfrac{19}{50} \\ \dfrac{7}{25} & -\dfrac{8}{25} & -\dfrac{3}{25} \end{pmatrix}$.

3) a) $S \Leftrightarrow A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 720 \\ 820 \end{pmatrix}$

b) On a : $A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 720 \\ 820 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{50}B\times\begin{pmatrix} 1460 \\ 720 \\ 820 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}$

Par suite $S_{IR^3} = \{(100, 120, 80)\}$.

4) On désigne par : x le nombre de sacs de mélange G_1
y le nombre de sacs de mélange G_2
z le nombre de sacs de mélange G_3

On a : $\begin{cases} 500x + 400y + 600z = 146000 \\ 400x + 200y + 100z = 72000 \\ 100x + 400y + 300z = 82000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 6z = 1460 \\ 4x + 2y + z = 720 \\ x + 4y + 3z = 820 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 120 \\ z = 80 \end{cases}$

Par suite on a : 100 sacs de mélange G_1, 120 sacs de mélange G_2 et 80 sacs de mélange G_3.

Exercice 3 :

1) a) On a : g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = e^x + xe^x > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
Donc g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

b) On a : $g'(x) > 0$, $g(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x) - 1 = +\infty$.

x	0		$+\infty$
g '(x)		+	
g	-1	$\nearrow$	$+\infty$

c) On a g est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.
Comme $0 \in [-1, +\infty[$ alors il existe un unique $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
On a $g(0{,}5) = -0{,}17 < 0$ et $g(0{,}6) = 0{,}09 > 0$ alors $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

d)

x	0	α	$+\infty$
Signe de g(x)	-		+

2) Soit $f(x) = e^x - \ln x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (e^x - \ln x) = 1 - (-\infty) = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x}) = +\infty(+\infty - 0) = +\infty$

b) On a f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(xe^x - 1) = \frac{1}{x}g(x)$..

c) TV :

x	0		α		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f		$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$	

3) On a : $MN = (e^{\alpha} - \ln\alpha)$ et comme $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha = -\ln\alpha$, (car $g(\alpha) = 0$) alors $MN = \alpha + \frac{1}{\alpha}$

Exercice 4 :

1) a) L'ordre du graphe G est égal à 5.

b)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	4	2	3	3	2

c) G est un graphe connexe qui admet exactement deux sommets de degré impair donc il admet une chaine eulérienne. Par suite un piéton peut visiter toutes les boutiques en passant par chaque rue une et une seule fois.

2) a) {A, B, C} est un exemple d'un sous graphe complet.

b) Le sup des ordres des sous graphes complets de G est 3.
Le sup des degrés des sommets est 4
Par suite $3 \leq n \leq 4 + 1$ donc $3 \leq n \leq 5$.

c) Le sommet A de couleur C_1
Les sommets B et D de couleur C_2
Les sommets C et E de couleur C_3
Par suite n = 3.

3) a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Le nombre de chaines orientées de longueur 4 allant de B à D est a_{24} dans la matrice M^4.
On a : $a_{24} = 4$ donc il y a 4 chaines orientées de longueur 4 allant de B à D.
Exemple : B – A – E – A – D .

c) Le nombre de chaines orientées de longueur 4 allant de B à D est a_{24} dans la matrice M^5.

$$a_{24} = (5\ \ 6\ \ 3\ \ 4\ \ 3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5+0+0+0+3 = 8 \text{ ou bien } a_{24} = (1\ 0\ 1\ 0\ 0) \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4+0+4+0+0 = 8$$