RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

*****

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 4 pages. ***La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie***

Exercice N°1 : (4 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(\sqrt{3}+3i)z-2+2i\sqrt{3}=0$.

   a) Vérifier que $(\sqrt{3}-i)^2=2-2i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=2i$, $z_B=\sqrt{3}+i$ et $z_C=z_A+z_B$.

   a) Calculer $\overline{z}_C\left(z_B-z_A\right)$ et en déduire que $(OC)\perp(AB)$.

   b) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

   c) Dans l'annexe ci-jointe figure 1, placer le point A et construire les points B et C.

   d) Montrer que OACB est un losange.

3) Soit F l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z-2i|=|z-\sqrt{3}-i|$.

   Montrer que F est la droite (OC).

Exercice N° 2 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=0, \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-1, \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}+2=\dfrac{1}{2}\left(u_n+2\right)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>-2$.

   c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   d) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=\ln\left(u_n+2\right)$.

   a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$.

d) A partir de quelle valeur de n, $u_n \leq -1{,}99$?

<u>Exercice N°3 :</u> (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 5x - 3y = 1$.

a) Vérifier que le couple $(2,3)$ est solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2) Soit S l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant : $\begin{cases} n \equiv 1[5], \\ n \equiv 2[3]. \end{cases}$

a) Vérifier que 2021 est un élément de S.

b) Soit n un élément de S et (p,q) le couple d'entiers relatifs vérifiant $\begin{cases} n = 5p + 1, \\ n = 3q + 2. \end{cases}$

Montrer que le couple (p,q) est solution de l'équation (E).

c) Déduire que si n est un élément de S alors $n \equiv 11[15]$.

3) a) Montrer que $2021^{2021} \equiv 1[5]$.

b) Justifier que $2021^2 \equiv 1[3]$ et déduire que $2021^{2021} \equiv 2[3]$.

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2021^{2021} par 15.

<u>Exercice N°4 :</u> (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x - 1$. (f'' est la dérivée seconde de la fonction f).

b) Etudier le sens de variation de f' et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 1$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que: $-1 < \alpha < -0{,}8$.

3) a) Montrer que le point $K(0,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

b) Montrer que la droite $T: y = x + 1$ est la tangente à (C) au point K.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x+1)$.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$.

   b) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de g.

   c) Déterminer la position relative de (C) et T.

   d) Dans l'annexe ci-jointe figure 2, tracer T et (C).

5) On désigne par A l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$.

   Montrer que $A = \frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + 1$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session de contrôle (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

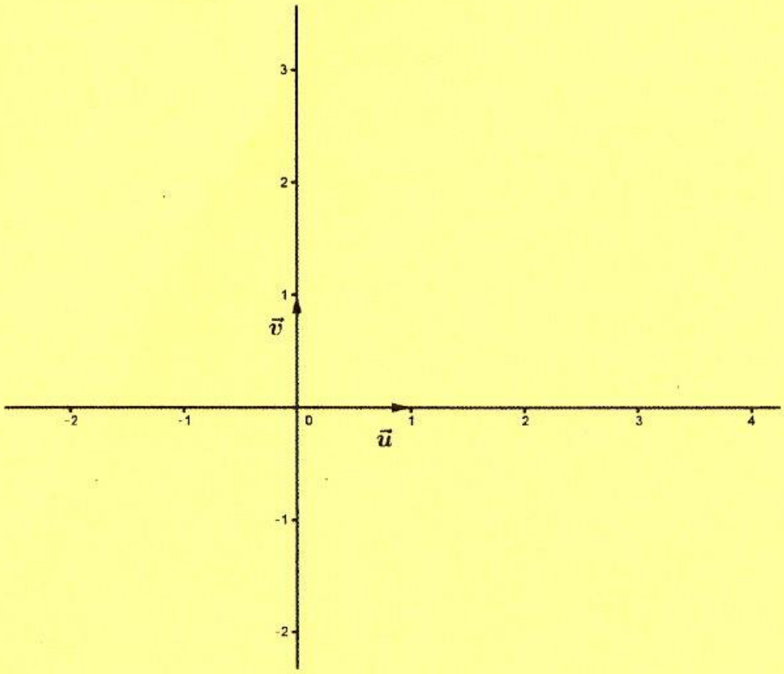

Figure 2