MATHÉMATIQUES

Section : Sciences de l'informatique

Session principale 2021

Exercice 1 :

1) a) $(3+i)^2 = 3^2 + 2\times 3\times i + i^2 = 9 + 6\,i - 1 = 8 + 6\,i$

Donc $(3+i)^2 = 8 + 6\,i$

b) $\Delta = [-(5-3\,i)]^2 - 4\times 1\times(2-9\,i) = (5-3\,i)^2 - 8 + 36\,i$

$= 25 - 30\,i - 9 - 8 + 36\,i = 8 + 6\,i = (3+i)^2$

Donc $\delta = 3 + i$ une racine carrée de Δ

D'où $Z_1 = \frac{(5-3\,i)-(3+i)}{2} = \frac{5-3\,i-3-i}{2} = \frac{5-3\,i+3+i}{2} = \frac{2-4\,i}{2} = 1 - 2\,i$

$Z_2 = \frac{(5-3\,i)+(3+i)}{2} = \frac{8-2\,i}{2} = 4 - i$

Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{\ 1-2\,i\ ,\ 4-i\ \}$

2) a) Le point C est la symétrie de A par rapport à K donc K est le milieu de [AC]

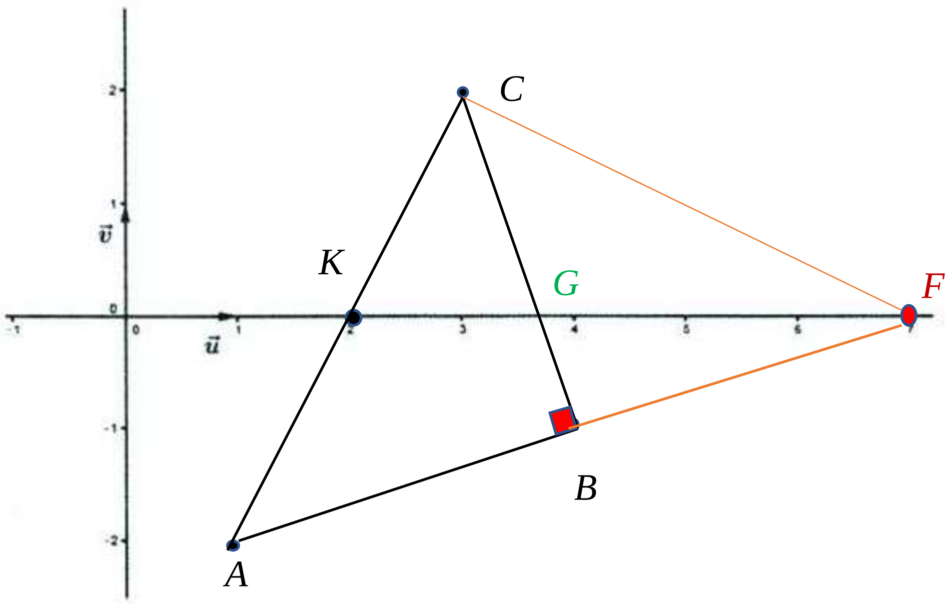
Par suite $\frac{Z_C+Z_A}{2} = Z_K$ sig $Z_C + Z_A = 2\,Z_K$

Sig $Z_C = 2\,Z_K - Z_A = 4 - 1 + 2\,i = 3 + 2\,i$

Ainsi $Z_C = 3+2\,i$

b)

Figure 1



c) $\overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_B - Z_C) = \overline{(4 - \imath - 1 + 2\,\imath)} \;\times\; (4 - i - 3 - 2\,i\,)$

$= \overline{(3 + \imath)} \;\times\; (1 - 3\,i\,) = (3 - i\,) \;\times\; (1 - 3\,i\,)$
$= 3 - 9\,i - i - 3 = -10\,i$

d) $\overline{Aff(\,\overrightarrow{AB}\,)} \times Aff(\,\overrightarrow{CB}\,) = \overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_B - Z_C) = -10\,i \in i\mathbb{R}^*$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux d'où ABC est triangle rectangle en B

$AB = |Z_B - Z_A| = |3 + i\,| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$CB = |Z_B - Z_C| = |1 - 3\,i\,| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

Donc $AB = CB$ ainsi ABC est triangle rectangle et isocèle en B

3) a) $\overline{(Z_B - Z_A)} \times (Z_F - Z_A) = \overline{(4 - \imath - 1 + 2\,\imath)} \times (\alpha - 1 + 2\,i\,)$

$= \overline{(3 + \imath)} \;\times\; (\alpha - 1 + 2\,i\,) = (3 - i\,) \;\times\; (\alpha - 1 + 2\,i\,)$

$= 3\alpha - 3 + 6\,i - \alpha i + i + 2 \quad = 3\alpha - 1 + 7\,i - \alpha i$

$= 3\alpha - 1 + (7 - \alpha)\;i$

b) Le point F appartient à la droite (AB) alors A, B et F sont alignés

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires

Donc $\overline{Aff(\,\overrightarrow{AB}\,)} \times Aff(\,\overrightarrow{CB}\,)$ est réel

Donc la partie imaginaire du produit $\overline{(Z_B - Z_A)} \;\times\; (Z_F - Z_A)$ est nulle

D'où $7 - \alpha = 0$ sig $\alpha = 7$

c) $\frac{Z_A + Z_F}{2} = \frac{1 - 2\,i + 7}{2} = \frac{8 - 2\,i}{2} = 4 - i = Z_B$

Donc B est le milieu du segment [AF]

d) Dans le triangle AFC on a : B est le milieu de [AF] et K est le milieu de [AC], or G le point d'intersection des droites (FK) et (BC) donc G est le centre de gravité du triangle AFC

Donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ sig $Z_A - Z_G + Z_F - Z_G + Z_C - Z_G = 0$

sig $Z_A + Z_F + Z_C = 3\,Z_G$
sig $Z_G = \frac{Z_A + Z_F + Z_C}{3} = \frac{1 - 2\,i + 7 + 3 + 2\,i}{3} = \frac{11}{3}$

Ainsi $Z_G = \frac{11}{3}$

Exercice 2 :

1) a) On a : $U_0 = 0$ alors $0 \leq U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $0 \leq U_n < 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 1$

On a : $U_n \geq 0$ sig $3\,U_n \geq 0$ sig $5 + 3\,U_n \geq 5$ sig $5 + 3\,U_n > 0$

Or $3 + 5\,U_n \geq 0$ donc $\frac{3+5\,U_n}{5+3\,U_n} \geq 0$ d'où $U_{n+1} \geq 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3+5\,U_n}{5+3\,U_n} - 1 = \frac{3+5\,U_n-5-3\,U_n}{5+3\,U_n} = \frac{2\,U_n-2}{5+3\,U_n}$$

$$= \frac{2(\,U_n-1)}{5+3\,U_n}$$

Or $U_n < 1$ donc $U_n - 1 < 0$ donc $U_{n+1} - 1 < 0$

Donc $U_{n+1} < 1$ par suite $0 \leq U_{n+1} < 1$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n < 1$

b) Pour tout n∈N on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3+5\,U_n}{5+3\,U_n} - U_n = \frac{3+5\,U_n-5\,U_n-3(\,U_n)^2}{5+3\,U_n} = \frac{3-3\,(U_n)^2}{5+3\,U_n} = \frac{3\,[1-(U_n)^2\,]}{5+3\,U_n}$$

Or $0 \leq U_n < 1$ alors $0 \leq (U_n)^2 < 1$ donc $1 - (U_n)^2 \geq 0$

Ains $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente ver une limite finie ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 1$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3+5x}{5+3x}$

f est une fonction rationnelle donc continue sur son domaine $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ donc f est continue en ℓ donc ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3+5x}{5+3x} = x \Leftrightarrow 5x + 3x^2 = 3 + 5x$$

$$\Leftrightarrow 3\,x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \;\; ou \;\; x = -1$$

Or $\ell \geq 0$ donc $\ell = 1$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1} = \frac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \frac{1-\frac{3+5\,U_n}{5+3\,U_n}}{1+\frac{3+5\,U_n}{5+3\,U_n}} = \frac{\frac{5+3\,U_n-3-5\,U_n}{5+3\,U_n}}{\frac{5+3\,U_n+3+5\,U_n}{5+3\,U_n}} = \frac{2\,(1-U_n)}{8\,(1+U_n)} = \frac{1}{4}\;V_n$$

Donc (V_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

b) On a : (V_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme

$V_0 = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = V_0\ q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On a : $V_n = \frac{1- U_n}{1+U_n} \Leftrightarrow V_n \times (1 + U_n) = 1 - U_n$

$$\Leftrightarrow V_n + V_n \times U_n = 1 - U_n \quad \Leftrightarrow V_n \times U_n + U_n = 1 - V_n$$

$$\Leftrightarrow U_n \times (1 + V_n) = 1 - V_n \Leftrightarrow U_n = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 + \frac{1}{4^n}} \quad \Leftrightarrow U_n = \frac{\frac{4^n - 1}{4^n}}{\frac{4^n + 1}{4^n}}$$

$\Leftrightarrow U_n = \frac{4^n-1}{4^n+1}$ Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{4^n-1}{4^n+1}$

c) $U_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \frac{4^n-1}{4^n+1} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}99 \times (4^n + 1) \leq 4^n - 1$

$\Leftrightarrow 0{,}99 \times 4^n + 0{,}99 \leq 4^n - 1 \Leftrightarrow 0{,}99 \times 4^n - 4^n \leq -1 - 0{,}99$

$\Leftrightarrow -0{,}01 \times 4^n \leq -1{,}99 \quad \Leftrightarrow 4^n \geq \frac{-1{,}99}{-0{,}01} \quad \Leftrightarrow 4^n \geq 199$

$\Leftrightarrow ln(4^n) \geq ln(199) \quad \Leftrightarrow n\ ln(4) \geq ln(199)$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln(199)}{ln(4)} \quad \Leftrightarrow n \geq 3{,}8183123 \ldots$

Ainsi à partir $n = 4$ on a $U_n \geq 0{,}99$

Exercice 3 :

1) a) $-2 \times 7 + 3 \times 8 = -14 + 24 = 10$

Donc (7 , 8) est une solution de l'équation (E)

b) $(-2) \wedge 3 = 1$ *divise* 10 donc l'équation (E) admet des solutions

(x , y) est une solution de l'équation (E)

$\Leftrightarrow -2\,x + 3\,y = 10 \Leftrightarrow -2\,x + 3\,y = -2 \times 7 + 3 \times 8$

$\Leftrightarrow -2\,x + 2 \times 7 = -3\,y + 3 \times 8 \Leftrightarrow -2\,(x - 7) = 3(-\,y + 8)$

$$\left.\begin{array}{c} 3\ divise\ -2\,(x-7) \\ (-2) \wedge 3 = 1 \end{array}\right\} \xRightarrow{Lemme\ de\ Gauss} 3\ divise\ (x-7)$$

$\Rightarrow$ *il existe un entier relatif* k *tel que* $x - 7 = 3\,k$

$\Rightarrow x = 3k + 7 \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$

Or $-2\,(x - 7) = 3(-\,y + 8)$ *alors* $-2 \times 3\,k = 3\ (-y + 8)$
donc $-2\,k = -y + 8$

$donc \ \ y = 2\,k + 8$

$-2 \times (3k + 7) + 3(2k + 8) = -6\,k - 14 + 6\,k + 24 = 10$

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{\,(3\,k + 7; 2\,k + 8)\ \ avec\ k \in \mathbb{Z}\ \}$

2) a) $-2\ a_n + 3\ b_n = -2 \times (7 + 3 \times 6^n) + 3(8 + 2 \times 6^n)$
$= -14 - 6^{\,n+1} + 24 + 6^{n+1} \ = 10$

$donc$ (a_n ; b_n) est une solution de l'équation (E)

b) $\left.\begin{array}{l} d_n \ \ divise\ a_n \\ d_n \ \ divise\ b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ d_n \ \ divise - 2\,a_n + 3\,b_n$

$\Rightarrow d_n \ \ divise\ 10$

3) a) On a : $6 \equiv 1\ [\ 5\ ]$ donc $6^n \equiv\ 1^n\ [\,5]$ d'où $6^n \equiv 1\ [\,5]$

b) On a $6^n \equiv 1\ [\ 5\ ]$ donc $3 \times 6^n \equiv\ 3\ [\ 5]$

Donc $7 + 3 \times 6^n \equiv 10\ [\ 5]$ d'où $a_n \equiv 0\ [\ 5]$

On a : $6^n \equiv 1\ [\ 5\ ]$ donc $2 \times 6^n \equiv\ 2\ [\ 5]$

Donc $8 + 2 \times 6^n \equiv 10\ [\ 5]$ d'où $b_n \equiv 0\ [\ 5]$

c) On a : $a_n \equiv 0\ [\ 5]$ donc 5 $divise\ a_n$ et on a $b_n \equiv 0\ [\ 5]$ donc 5 $divise\ b_n$
donc 5 $divise\ d_n$

Or $d_n \ \ divise\ 10\ donc\ d_n = 5\ \ ou\ d_n = 10$

4) a) Pour $n = 1\ \ on\ a\ 6^1 \equiv 6\ [\ 10\ ]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\ supposons\ que\ \ 6^n \equiv 6\ [\ 10\ ]$ et $ontrons\ que\ 6^{n+1} \equiv 6\ [\ 10\ ]$

$6^n \equiv 6\ [\ 10\ ]\ \ alors\ 6^{n+1} \equiv 36\ [\ 10\ ]\ \ donc\ 6^{n+1} \equiv 6\ [\ 10\ ]$

$Ainsi\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*\ \ on\ a : \ \ 6^n \equiv 6\ [\ 10\ ]$

b) P$our\ tout\ n \in \mathbb{N}^*$; $6^n \equiv 6\ [\ 10\ ]\ alors\ \ 3 \times 6^n \equiv 18\ [\ 10\ ]$

D$onc\ \ 7 + 3 \times\ 6^n \equiv 25\ [\ 10\ ]$ d'où $a_n \equiv 5\ [\ 10\ ]$

c) $On\ a : \ a_n \equiv 5\ [\ 10\ ]\ \ donc\ 10\ ne\ divise\ pas\ a_n$ donc $d_n \neq 10$

Par suite $d_n = 5$ (car $d_n = 5\ \ ou\ d_n = 10$)

Exercice 4 :

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + ln(x) \ \ = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$)

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + ln(x) \ \ = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2\,x} + \frac{Ln(x)}{x} = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{Ln(x)}{x} = +\infty$)

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées $(O\ ;\ \vec{j})$ *au voisinage de* $(+\infty)$

2) a) Pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty\,[$ on a : $f'(x) = x + \frac{1}{x}$

Donc pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty\,[$, $f'(x) > 0$

b)

x	0		+∞
f '(x)	‖	+	
f	‖ −∞	↗	+∞

c) On a f est continue et strictement croissante sur$]\,0\ ;\ +\infty[$ donc f est une bijection de $]\,0\ ;\ +\infty[$ sur $f(]\,0\ ;\ +\infty[) =]-\infty;+\infty[$

Or $0 \in]-\infty\ ;\ +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]\,0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α.

On a : $f(0{,}5) = \frac{5}{8} + ln(0{,}5) \approx -0{,}068 < 0$

$f(0{,}6) = 0{,}68 + ln(0.6) \approx 0.169 > 0$

Donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

3) a) Pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty\,[$ on a : $f'(x) = x + \frac{1}{x}$

Donc pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty\,[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b) Pour tout $x \in]\,0\ ;\ +\infty\,[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

x	0		1		+∞
f ''(x)	‖	−	0	+	

La dérivée seconde s'annule et change de signes en 1 et $f(1) = 1$

Ainsi le point $G(1{,}1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)

c) Une équation de la tangente à (C) au point G est :

$$T\ :\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$f(1) = 1$ *et* $f'(1) = 2$ donc $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$

Donc $T\!: y = 2x - 1$ est la tangente à (C) au point G.

4) a) Pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $g'(x) = f'(x) - 2$

$$= x + \frac{1}{x} - 2 \quad = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x}$$

Pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

D'où la fonction g est croissante

b) $g(1) = f(1) - (2 - 1) = 1 - 1 = 0$

g est croissante sur $]\,0\,, + \infty\,[$

- $si\;\; x < 1\; alors\; g(x) < g(1) \qquad donc\; g(x) < 0$
- $si\;\; 1 \leq x\;\; alors\;\; g(1) \leq g(x) \qquad donc\;\; 0 \leq g(x)$

x	0		1		$+\infty$
g(x)	||	$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y = g(x)$	||	$-$	0	$+$	
Position	||	$T/_{(C)}$	$T \cap (C)$	$(C)/_{T}$