MATHÉMATIQUES
Section : Sciences de l'informatique
Session principale 2022

Exercice 1 :

1) a) $(2+i)^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

b) $\Delta = \left[-(4-3i)\right]^2 - 4\times1\times(1-7i) = 3+4i = (2+i)^2$

D'où $z_1 = \dfrac{(4-3i)+(2+i)}{2} = 1-2i$ et $z_2 = \dfrac{(4-3i)+(2+i)}{2} = 3-i$

Par suite $S_{\mathbb{C}} = \{z_1 ; z_2\}$.

2) a) $z_A - z_B = (3-i-1+2i) = 2+i$ et $\overline{z_A - z_C} = \left(\overline{3-i-1-3i}\right) = \overline{2-i} = 2+i$

Par suite $(z_A - z_B)\times\left(\overline{z_A - z_C}\right) = 10i$

b) On a $(z_A - z_B)\times\left(\overline{z_A - z_C}\right) = 10i \in i\mathbb{R}^*$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux.

Donc ABC est un triangle rectangle en A, d'où A appartient au cercle de diamètre $[BC]$

Par suite A appartient au cercle ζ

3) a) On a : Ω le centre du cercle de diamètre $[BC]$, donc Ω est le milieu de $[BC]$.

D'où $z_\Omega = \dfrac{z_B + z_C}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}i$

Par suite $\Omega A = |z_A - z_\Omega| = \left|2 - \dfrac{3}{2}i\right| = \sqrt{4+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{5}{2}$

b) ζ est le cercle de diamètre $[BC]$ donc il est de rayon $\Omega A = \dfrac{5}{2}$

On a : $M \in \zeta$ donc $\Omega M = \dfrac{5}{2}$

$|z_M - z_\Omega| = \dfrac{5}{2}$ sig $\left|(x-1)+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)i\right| = \dfrac{5}{2}$sig $\sqrt{(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2}$sig $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$

4) a) $\text{Aff}\,(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = 5i$ donc (BC) est parallèle à l'axe $(O, \vec{v})$.

On a : $H \in (BC)$ donc $\text{Re}(z_H) = \text{Re}(z_B) = \text{Re}(z_C) = 1$

H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC), donc $(MH) \perp (O;\vec{v})$

Par suite $(MH) \parallel (O;\vec{u})$ donc $\text{Im}(z_H) = \text{Im}(z_M) = y$ Ainsi $z_H = 1+iy$

b) HM est une hauteur du triangle MBC, $S = \dfrac{MH\times BC}{2}$

On a : $HM = |z_M - z_H| = |x+iy-1-iy| = |x-1|$ et BC = 5

Par suite $S = \dfrac{5}{2}|x-1|$.

$S = 5 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}|x-1| = 5 \Leftrightarrow |x-1| = 2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$

Or on a $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ donc $(2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Leftrightarrow y=2 \text{ ou } y=-1$

Par suite $z_M \in \{3+2i;3-i;-1+2i;-1-i\}$.

Exercice 2 :

1) a) On a : $3\times1 - 4\times(-1) = 3 + 4 = 7$ donc (1 ; -1) est une solution de (E').

b) On a : 3 et 4 sont premiers entre eux donc (E') admet des solutions.

Comme (1 ; -1) est une solution de (E') alors $3x-4y=3\times1-4\times(-1) \Leftrightarrow 3(x-1)=4(y+1)$

4 divise 3(x-1) et $4 \wedge 3 = 1$ donc d'après Gauss on a : 4 divise (x-1) donc x-1= 4k avec $k\in Z$

Par suite x = 1 + 4k avec $k\in Z$

3(1 + 4k -1) = 4(y + 1) d'où y = 3k – 1 avec $k\in Z$

On a : 3(4k + 1) – 4(3k – 1) = 12k + 3 – 12k + 4 = 7

Par suite $S_{ZxZ} = \{(1 + 4k ; 3k – 1) ; k\in Z\}$.

2) a) $a_n=4n^2+8n-3=4n^2+8n-4+1=4(n^2+2n-1)+1$

$b_n=3n^2+6n-4=3n^2+6n-3-1=3(n^2+2n-1)-1$

Donc $a_n = 4k_0 + 1$ et $b_n = 3k_0 – 1$ avec $k_0 = n^2 + 2n – 1$ ou $n\in IN$.

Par suite $(a_n ; b_n)$ est une solution de (E').

b) On a : $(a_n ; b_n)$ est une solution de (E') donc $3a_n – 4b_n = 7$

d_n divise a_n et d_n divise b_n donc d_n divise $3a_n – 4b_n$ d'où d_n divise 7

$d_n \in D_7 = \{-7 ; -1 ;1 ; 7\}$, or $d_n > 0$ donc $d_n = 1$ ou $d_n = 7$

3) a) $a_n-b_n=4n^2+8n-3-3n^2-6n+4=(n+1)^2$

b)

Reste de la division de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $(n + 1)^2$ par 7	1	4	2	2	4	1	0

4) a) d_n divise a_n et d_n divise b_n donc d_n divise $(a_n – b_n)$ d'où d_n divise $(n + 1)^2$

Donc si $d_n = 7$ alors 7 divise $(n + 1)^2$ d'où $(n+1)^2 \equiv 0[7]$ par suite $n \equiv 6[7]$

b) $n\equiv 6[7] \Rightarrow n^2 \equiv 1[7] \Rightarrow 4n^2 \equiv 4[7]$

D'autre part $8n-3\equiv 3[7]$ donc $a_n \equiv 0[7]$

$3n^2\equiv 3[7]$ et $6n-4\equiv 4[7]$ donc $b_n\equiv 0[7]$

Par suite si $n\equiv 6[7]$ alors a_n et b_n sont divisibles par 7.

c) On a : $d_n=1$ ou $a_n=7$

Si $n\equiv 6[7]$ alors a_n et b_n sont divisibles par 7 donc d_n divise 7 par suite $d_n = 7$.

$n\equiv 6[7] \Leftrightarrow d_n=7$

Si non alors $d_n = 1$.

Exercice 3 :

1) a) $u_1=e^{-0}u_0=1$ et $u_2=e^{-1}u_1=e^{-1}\times1=e^{-1}=\frac{1}{e}$

b) On a : $u_0=1>0$

Soit $n\in IN$. On suppose que $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$

On a : $u_n>0$ et $e^{-n}>0$ donc $u_{n+1}=e^{-n}u_n>0$

Par suite pour tout $n\in IN$, $u_n>0$.

c) On a : $n \geq 0 \Leftrightarrow -n \leq 0 \Leftrightarrow e^{-n} \leq 1$ et on a $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = u_n \times e^{-n} \leq u_n$

Par suite (u_n) est une suite décroissante.

d) On a : (u_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

2) a) Pour tout $n \in IN$, on a : $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(e^{-n}) = -n$

b) Pour n = 0, on a $v_0 = \ln(u_0) = 0 = \frac{-0 \times (0-1)}{2}$

Soit $n \in IN$. On suppose que $v_n = \frac{-n \times (n-1)}{2}$ montrons que $v_{n+1} = \frac{-(n+1) \times n}{2}$

On a : $v_{n+1} = -n + v_n = -n + \frac{-n(n-1)}{2} = \frac{-2n - n^2 + n}{2} = \frac{-n(n+1)}{2}$

Par suite pour tout $n \in IN$, on a : $v_n = \frac{-n \times (n-1)}{2}$.

3) a) Pour tout $n \in IN$, on a : $v_n = \ln(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} = e^{\frac{-n(n-1)}{2}}$

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n(n-1)}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{-n(n-1)}{2}} = 0$, par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4 :

1) On a : $g(-\ln 2) = 0$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $x \leq -\ln 2$ alors $g(x) \leq g(-\ln 2) = 0$

Si $x \geq -\ln 2$ alors $g(x) \geq g(-\ln 2) = 0$

2) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x(e^x - 1) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Donc (Γ) admet une asymptote horizontale d'équation y = 0.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x(e^x - 1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\frac{e^x}{x}(e^x - 1) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc (Γ) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$.

3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2e^x(e^x - 1) + 2e^x(e^x) = 2e^x(2e^x - 1) = 2e^x g(x)$

b) $f(-\ln 2) = 2\left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right) \times \left(\frac{1}{e^{\ln 2}} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2}$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
f '(x)		$-$	0		$+$		
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$			$+\infty$

4) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x)-g(x) = 2e^x(e^x-1)-2e^x+1 = 2(e^{2x}-2e^x+1)-1$

$$= 2(e^x-1)^2-1 = 2\left[(e^x-1)^2-\frac{1}{2}\right].$$

$$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x-1=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } e^x-1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow e^x=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \text{ ou } e^x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Par suite $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $x=\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

D'autre part on a : $g\left(\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2\times\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1 = 1+\sqrt{2}.$

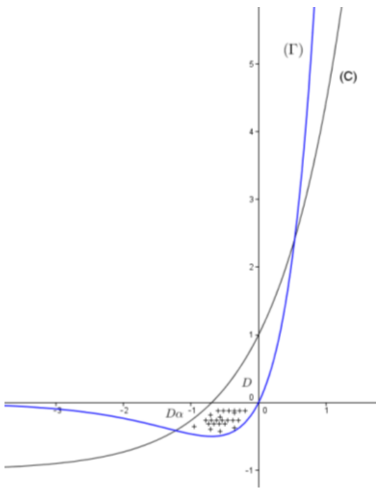
$$g\left(\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2\times\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1 = 1-\sqrt{2}.$$

Donc les courbe (C) et (Γ) se coupent aux points $A\left(\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2};1-\sqrt{2}\right)$ et $B\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2};1+\sqrt{2}\right)$

b) $f(0) = 2e^0(e^0-1) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$-$	0	$+$

c)



5) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{1}{2}\left[f'(x)-g'(x)\right] = \frac{1}{2}\left[2e^x(2e^x-1)-2e^x\right] = \frac{1}{2}(4e^{2x}-4e^x)$

Par suite $\frac{1}{2}\left[f'(x)-g'(x)\right] = 2(e^{2x}-e^x) = f(x)$

b) $I = \int_{-\ln 2}^{0}|f(x)|dx = -\int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{0}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx = -\frac{1}{2}\left[f(x)-g(x)\right]_{-\ln 2}^{0}.$

Par suite $I = -\frac{1}{2}\left[f(0)-g(0)\right]+\frac{1}{2}\left[f(-\ln 2)-g(-\ln 2)\right] = \frac{1}{4}.$

c) $I_\alpha = \int_{\alpha}^{-\ln 2}|f(x)|dx = \int_{\alpha}^{-\ln 2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\ln 2}^{\alpha}\left[f'(x)-g'(x)\right]dx = \frac{1}{2}\left[f(x)-g(x)\right]_{-\ln 2}^{\alpha}.$

Par suite $I = \frac{1}{2}\left[f(\alpha)-g(\alpha)\right]-\frac{1}{2}\left[f(-\ln 2)-g(-\ln 2)\right] = \frac{1}{2}\left[f(\alpha)-g(\alpha)\right]+\frac{1}{4}.$

d) $I_\alpha = I \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f(\alpha)-g(\alpha)\right]+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ou $\alpha = \ln\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Comme on a $(\alpha < 0)$ alors $\alpha = \ln\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

e) La partie hachurée est sur la figure de la courbe.