RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages, la page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points):

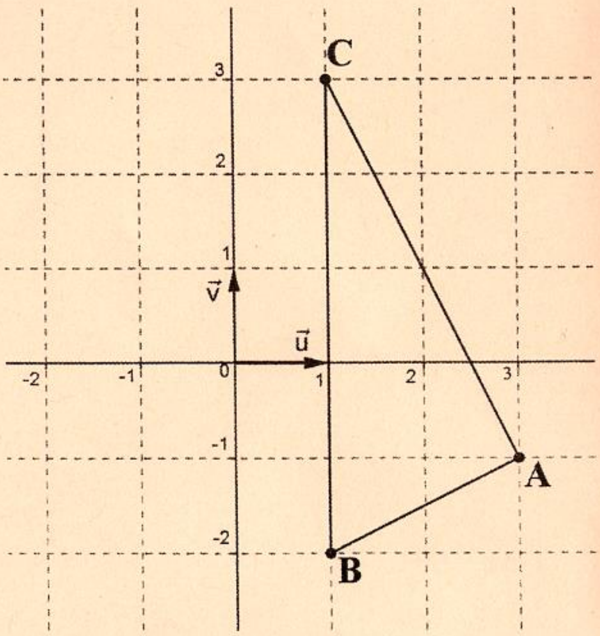
1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2-(4-3i)z+1-7i=0$.

a) Vérifier que $(2+i)^2=3+4i$.

b) Résoudre (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=3-i$, $z_B=1-2i$ et $z_C=1+3i$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[BC]$.



a) Calculer $(z_A-z_B)\overline{(z_A-z_C)}$.

b) En déduire que A appartient à $(\mathscr{C})$.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point du cercle $(\mathscr{C})$ différent de B et C.

3) On pose : $z_M=x+iy$ avec x et y deux réels.

On note Ω le centre de $(\mathscr{C})$.

a) Vérifier que $z_\Omega=1+\frac{1}{2}i$ et calculer ΩA.

b) Montrer que $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{4}$.

4) Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite (BC) et on désigne par S l'aire du triangle MBC.

a) Justifier que $z_H=1+iy$.

b) Montrer que $S=\frac{5}{2}|x-1|$.

c) Déterminer les affixes des points M pour lesquels $S=5$.

✎Exercice 2 (5 points):

1) On considère dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$ l'équation $(E') : 3x - 4y = 7$.

   a) Vérifier que $(1,-1)$ est une solution de (E').

   b) Déterminer les couples (x,y) de $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$ solutions de (E').

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les nombres $a_n = 4n^2 + 8n - 3$ et $b_n = 3n^2 + 6n - 4$.

   On pose $d_n = PGCD\,(a_n, b_n)$.

   a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 4(n^2 + 2n - 1) + 1$ et $b_n = 3(n^2 + 2n - 1) - 1$

   et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a_n, b_n) est une solution de (E').

   b) Montrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 7$.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - b_n = (n+1)^2$ et justifier que d_n divise $(n+1)^2$.

   b) Recopier et compléter le tableau suivant.

Reste de la division euclidienne de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $(n+1)^2$ par 7							

4) a) Montrer que si $d_n = 7$ alors $n \equiv 6[7]$.

   b) Montrer que si $n \equiv 6[7]$ alors a_n et b_n sont divisibles par 7.

   c) Déterminer d_n suivant les valeurs de n.

✎Exercice 3 (4 points):

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = e^{-n}U_n \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) a) Calculer U_1 et U_2.

   b) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

   c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} \leq 1$ et montrer que (U_n) est décroissante.

   d) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n)$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} - V_n = -n$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{-n(n-1)}{2}$.

3) a) Donner l'expression de U_n en fonction de n.

   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

✎Exercice 4 (6 points):

On donne dans l'annexe jointe, la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2e^x - 1$.

1) En utilisant le graphique, déterminer $g(-\ln 2)$ et donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x(e^x - 1)$ et on note (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3) a) Montrer que $f'(x) = 2e^x g(x)$ pour tout réel x.

b) Vérifier que $f(-\ln 2) = -\dfrac{1}{2}$ et donner le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que $f(x) - g(x) = 2\left[(e^x - 1)^2 - \dfrac{1}{2}\right]$ pour tout réel x et en déduire que (C) et (Γ) se coupent aux points : $A(\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$ et $B(\ln\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2})$.

b) Déterminer $f(0)$ et donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.

c) Tracer la courbe (Γ).

5) Soit I l'aire du domaine D du plan limité par la courbe (Γ), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

a) Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}(f'(x) - g'(x))$ pour tout réel x.

b) Montrer que $I = \dfrac{1}{4}$.

c) Pour tout réel $\alpha < -\ln 2$, on note I_α l'aire du domaine D_α du plan limité par la courbe (Γ), l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -\ln 2$.

Montrer que $I_\alpha = \dfrac{1}{2}(f(\alpha) - g(\alpha)) + \dfrac{1}{4}$.

d) En déduire que $I_\alpha = I$ si et seulement si $\alpha = \ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

e) Hachurer les domaines D et D_α pour $\alpha = \ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série :	Signatures des surveillants
Nom et Prénom :	....
Date et lieu de naissance :	....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2022)
Annexe à rendre avec la copie