MATHÉMATIQUES
Section : Sport
Session de contrôle 2021

Exercice 1 :

1) a) $p(A)=\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$

b) $\overline{B}$: obtenir aucun jeton vert.

$p(B)=1-p(\overline{B})=1-\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{3}{5}$

2) a) Si on tire le jeton noir et un jeton vert alors le gain algébrique est -4
Si on tire le jeton noir et un jeton blanc alors le gain algébrique est -2
Si on tire les deux jetons verts alors le gain algébrique est 0.
Si on tire un jeton vert et un jeton blanc alors le gain algébrique est 2.
Si on tire deux jetons blancs alors le gain algébrique est 4.
Donc les valeurs prises par X sont -4; -2; 0; 2 et 4

b) $p(X=2)=\dfrac{C_2^1\times C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

c)

x_i	-4	-2	0	2	4
$P(X = x_i)$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{6}{15}$	$\dfrac{3}{15}$

d) $E(X) = -4\times\dfrac{2}{15} + (-2)\times\dfrac{3}{15} + 0\times\dfrac{1}{15} + 2\times\dfrac{6}{15} + 4\times\dfrac{3}{15} = \dfrac{2}{3}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= (16\times\dfrac{2}{15} + 4\times\dfrac{3}{15} + 0\times\dfrac{1}{15} + 4\times\dfrac{6}{15} + 16\times\dfrac{3}{15}) - \dfrac{4}{9} = \dfrac{328}{45}$

e) $E(X) > 0$ donc le jeu est favorable

Exercice 2 :

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3-3x^2+5 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x^2+5 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x^2+5}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x^2+5}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

La courbe (Γ) de f admet deux branches infinies paraboliques de direction l'axe des ordonnées.

2) a) Pour tout $x\in IR$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b) On a: f '(x) = 0 sig x = 0 ou x = 2

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		+		-		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) f admet un minimum relatif de valeur 1 sur $[0,+\infty[$ donc l'équation f(x)=0 n'admet pas de solution dans $[0,+\infty[$

f est continue et strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et $f(]-\infty,0[) =]-\infty,5[$ or $0 \in]-\infty,5[$ donc l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α dans $]-\infty,0[$ et par suite l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

b) f est continue sur [-2,-1] et f(-2)xf(-1) < 0 donc $-2 < \alpha < -1$

c) $f(\alpha) = 0$ sig $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5 = 0$

sig $\alpha^2(3-\alpha) = 5$ et par suite $\alpha^2 = \dfrac{5}{3-\alpha}$

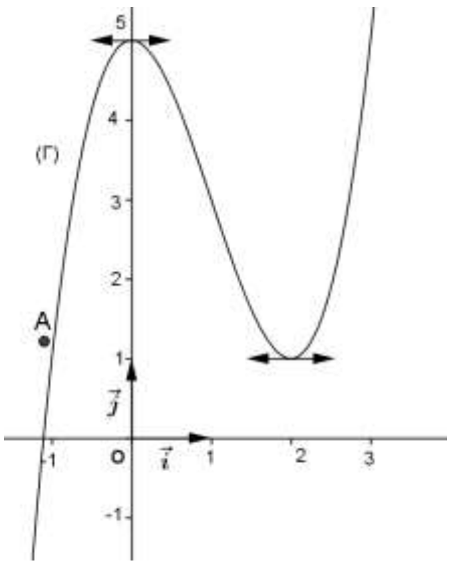
$\alpha^3 = 3\alpha^2 - 5 = 3x\dfrac{5}{3-\alpha} - 5 = \dfrac{15}{3-\alpha} - 5$

4) a) Soit x l'abscisse de A donc $x^2 = \dfrac{5}{3-x}$

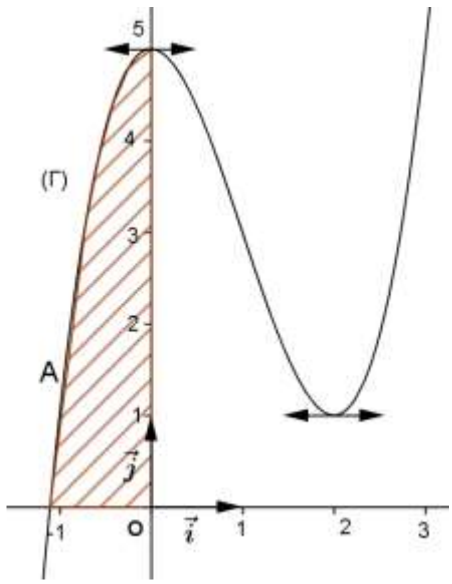
$x^2 = \dfrac{5}{3-x}$ sig $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ c'est-à-dire $f(x) = 0$

Par suite $x = \alpha$

b)



5) a)



b) $S = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x\right]_{\alpha}^{0} = -\frac{1}{4}\alpha^4 + \alpha^3 - 5\alpha = -\frac{1}{4}(\frac{15\alpha}{3-\alpha} - 5\alpha) + \frac{15}{3-\alpha} - 5 - 5\alpha$

$= \frac{5}{4}(\frac{\alpha}{3-\alpha} - 3\alpha)$

Exercice 3 :

1) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

b) La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en un seul point A(2, 0) donc l'équation f(x) = 0 admet une seule solution x = 2.

c) La courbe (Γ) coupe l'axe des ordonnées en un seul point (0, -2) donc f(0) = -2

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T), d'où $f'(0) = 3$

d)

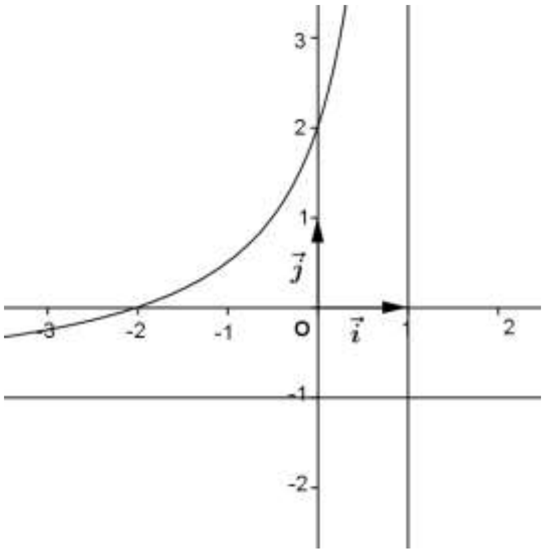
x		-1 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
f		$-\infty$ ↗ 1

2) a) f est continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-1, +\infty[$ sur f($]-1, +\infty[$)= $]-\infty, 1[$

b) On a : $f(2) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 2$

On a : $f(0) = -2$ donc $f^{-1}(-2) = 0$

c) La courbe de f^{-1} est le symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation y = x



3) a) $f'(x) = \dfrac{a(x+1) - 1(ax+b)}{(x+1)^2} = \dfrac{a-b}{(x+1)^2}$

b) On a $f(0) = -2$ donc $b = -2$

D'autre part $f'(0) = 3$ donc $a - b = 3$ et par suite $a = 1$

4) Soit $x \in]-\infty, 1[$ et $y \in]-1, +\infty[$ tels que $f(y) = x$

$\dfrac{y-2}{y+1} = x$ sig $y - 2 = x(y+1)$ sig $y = \dfrac{2+x}{1-x}$

Par suite $f^{-1}(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$