RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La **page 4/4 est à rendre avec la copie**.

Exercice 1 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

- L'urne U_1 contient trois boules blanches et deux boules noires.
- L'urne U_2 contient une boule blanche et deux boules noires.

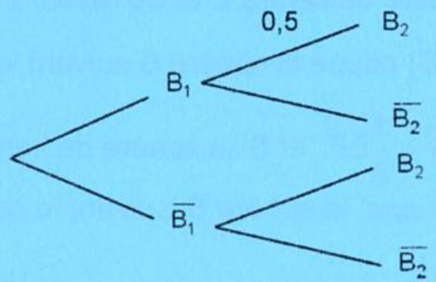
Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et la mettre dans U_2 , puis tirer au hasard une boule de U_2 et la mettre dans U_1.

Soient les événements :

B_1 : « La boule tirée de U_1 est blanche » et B_2 : « La boule tirée de U_2 est blanche ».

1) a) Vérifier que $P(B_2 / B_1)= 0,5$.

   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous associé à cette épreuve.



   c) Montrer que $P(B_2) = 0,4$.

   d) Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, qu'elle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit blanche ?

2) Soit l'événement E : « La boule tirée de U_1 est blanche et la boule tirée de U_2 est noire ». Vérifier que $P(E) = 0,3$.

3) Calculer la probabilité de l'événement F : « A la fin de l'épreuve, la répartition des boules dans les deux urnes reste inchangée ».

4) On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules noires restant dans l'urne U_2 à la fin de l'épreuve.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points

A(2,0,2), B(2,1,1), C(1,2,1) et E(-1,-1,0).

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

b) Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) Montrer que les points A, B, C et E sont non coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

c) Montrer que la distance du point E au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{3}$.

3) Soit Δ la droite passant par E et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Vérifier que le système $\begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha \in IR$, est une représentation paramétrique de Δ.

b) Vérifier que le point I(1,1,2) appartient à Δ.

c) Montrer que le point I est le centre du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

4) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 12 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S suivant le cercle Γ.

5) Soient F le point défini par $\overrightarrow{IF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ et S' la sphère de centre F et de rayon $\sqrt{14}$

Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant le cercle Γ

Exercice 3 (5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation , $z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1 + i = 0$.

2) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 - \sqrt{2}(2+i)z^2 + (1+3i)z + \sqrt{2}(1-i) = 0$.

a) Vérifier que $\sqrt{2}$ est une solution de (E).

b) Montrer que pour tout nombre complexe z ,

$$z^3 - \sqrt{2}(2+i)z^2 + (1+3i)z + \sqrt{2}(1-i) = (z-\sqrt{2})(z^2 - \sqrt{2}(1+i)z - 1 + i).$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

3) On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points

A, B d'affixes respectives : $z_A = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_B = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Montrer que $z_B = i(\sqrt{2}-1)\, z_A$.

b) En déduire que le triangle OAB est rectangle en O.

4) a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AB] et le mettre sous forme exponentielle.

b) Construire le point I dans la **figure1** de l'annexe ci jointe.

5) Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle OAB.

a) Montrer que I est le centre de (ζ).

b) Montrer que la droite (AI) est parallèle à l'axe des abscisses.

c) Construire les points A et B dans la **figure1** de l'annexe ci jointe.

6) La perpendiculaire à la droite (OI) et passant par le point I coupe la droite $(O,\vec{u})$ en un point C.

Déterminer l'affixe de C.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{2x} - 2e^{x} + 2$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 1)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = 2e^{x}(2e^{x} - 1)$ où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f.

b) En déduire que le point $A(-\ln 2, \frac{5}{4})$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

4) On a tracé dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe la tangente T à la courbe (C) au point A.

a) Vérifier que le point $B(\ln 2, 2)$ appartient à la courbe (C) et le construire dans **la figure 2**.

b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$. Montrer que $\mathcal{A} = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$.

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g^{-1}(x) = \ln(1 + \sqrt{x-1})$.

c) Construire, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C′) de la fonction réciproque g^{-1} de g.

d) En exploitant le graphique, calculer $\int_{1}^{2} \ln(1 + \sqrt{x-1})dx$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

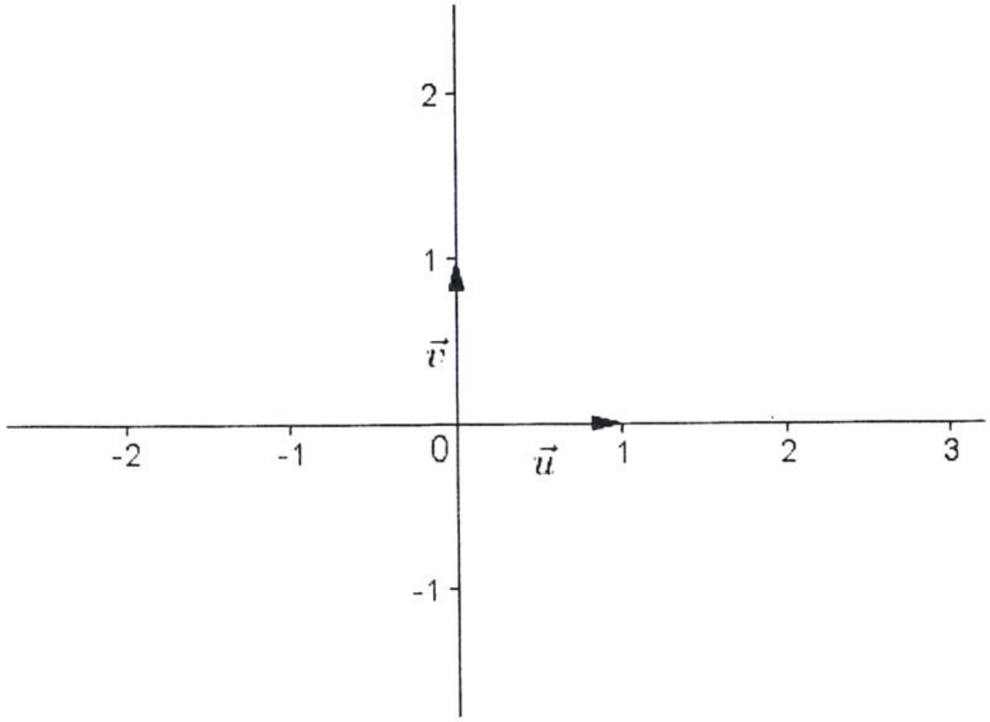


Figure 2