Epreuve : Mathématiques
Section : Sciences Techniques
Session de Contrôle 2022

Exercice 1 :

1) a) $A(1,2,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(3,2,1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}-2 & 0\\-2 & 0\end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 0\end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires $\Longrightarrow$ A , B et C ne sont pas alignés

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $P = (ABC)$

d'où $P : -4y + 4z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$

Or $B(1,0,-1) \in P$ donc $-4 + d = 0 \Longrightarrow d = 4$ ainsi $P : -4y + 4z + 4 = 0$

En simplifiant par (-4) on aura : $P : y - z - 1 = 0$

2) a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = 0\times 2 - 2\times 0 - 2\times 0 = 0$ d'où $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

Comme A, B et C sont non alignés alors ABC est un triangle rectangle en A

b) $I = B * C$ alors $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ de même $y_I = \frac{0+2}{2} = 1$ et $z_I = \frac{1-1}{2} = 0$

Ainsi $I(2,1,0)$

3) a) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2 = 0 \iff S : x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = -2 + 4 + 1$

$\iff S: (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3 = \sqrt{3}^2$

D'où S est la sphère de centre $I(2,1,0)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

b) On a : $I \in P$ donc $d = d(I,P) = 0 < R$ donc $r = \sqrt{R^2 - d^2} = R$ et par suite la sphère S coupe le plan P suivant le cercle ζ de centre I et de rayon $R = \sqrt{3}$

c) $IB^2 = IC^2 = (3-2)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2 = 3 = R^2$ donc B et C appartiennent à la sphère S

$IA^2 = (1-2)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2 = 3 = R^2$ donc $A \in S$

On a : A, B et C appartiennent à la fois au plan P et à la sphère S

donc A, B et C appartiennent au cercle $\zeta = P \cap S$

Conclusion : ζ est le cercle circonscrit au triangle ABC

4) a) $\Delta: \begin{cases} x = 2 \\ y = -\alpha + 1 \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

On remarque que $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ. On a : $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{n}$ d'où $\Delta \perp P$

pour $\alpha = 0$ on vérifie que $I \in \Delta$ d'où Δ est une droite perpendiculaire à P en I

b) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $M_\alpha(2, 1-\alpha, \alpha)$ alors $d(M_\alpha, P) = \frac{|1-\alpha-\alpha-1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{2|\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$

c) On remarque que $M_0 = I$ donc pour $\alpha \neq 0$, $ABCM_\alpha$ est un tétraèdre.

$$V_\alpha = \frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times IM_\alpha = \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| \times d(M_\alpha, P) = \frac{1}{6}\times\|\vec{n}\|\times\sqrt{2}|\alpha| = \frac{\sqrt{32}\times\sqrt{2}|\alpha|}{6} = \frac{4}{3}|\alpha|$$

d) $V_\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3} \iff 4|\alpha| = 2\sqrt{6} \iff |\alpha| = \frac{\sqrt{6}}{2} \iff \alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

e) $M_\alpha \in S \iff {IM_\alpha}^2 = 3 \iff 2\alpha^2 = 3 \iff \alpha^2 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} \iff \alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Exercice 2 :

1) **a)** $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^2 = 12-4+i8\sqrt{3} = 8+i8\sqrt{3}$

b) $z^2-2i\sqrt{3}z-5-2i\sqrt{3}=0$ ainsi $a=1$, $b=-2i\sqrt{3}$ et $c=-5-i2\sqrt{3}$

$\Delta = b^2-4ac = -12+20+i8\sqrt{3} = 8+i8\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}+2i\right)^2 = \delta^2$ avec $\delta = 2\sqrt{3}+2i$

d'où $z' = \frac{-b+\delta}{2a} = \sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = -\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)\ ,-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right\}$$

2) **a)** $z_E = 1$, $z_F = \sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ et $z_G = -\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$

$z_G - 1 = -\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)i - 1 = i^2\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)+i^2$

$z_G - 1 = i\left(i\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(-1+\sqrt{3}\right)\right) = i(z_F-1)$

b) $\frac{z_G-z_E}{z_F-z_E} = \frac{z_G-1}{z_F-1} = i \in i\mathbb{R}^*$, donc $\overrightarrow{EG} \perp \overrightarrow{EF}$ ainsi le triangle EFG est rectangle en E

$\left|\frac{z_G-z_E}{z_F-z_E}\right| = \left|\frac{z_G-1}{z_F-1}\right| = |i| = 1$, donc $EG = EF$ ainsi le triangle EFG est isocèle en E

Conclusion : EFG est un triangle isocèle et rectangle en E

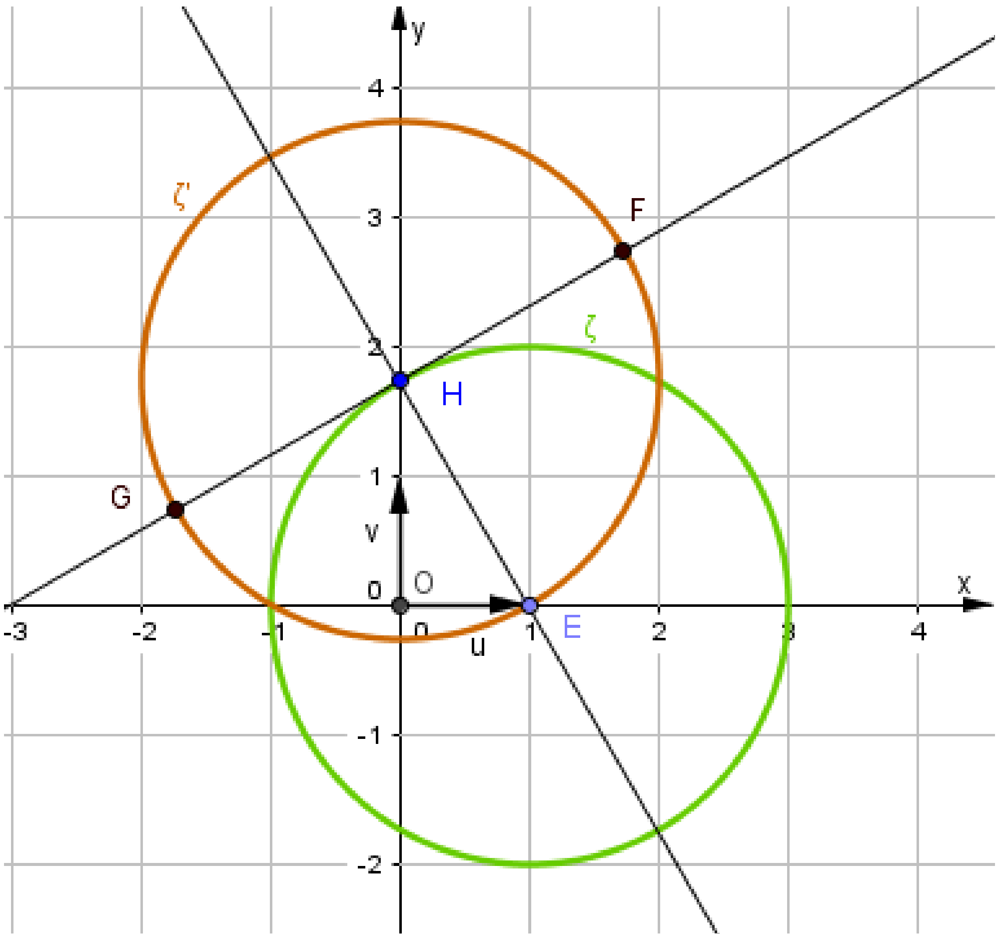
c) $H = F * G$ alors $z_H = \frac{z_G+z_F}{2} = i\sqrt{3}$

d) EFG est isocèle en E alors E est un point de la médiatrice du segment [FG]

Or $H = F * G$ d'où (EH) est la médiatrice du segment [FG]

3) **a)** $HE = |z_E - z_H| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$ d'où $H \in \zeta(E\,,2)$

b)



4) a) On a : $H = G * F$ alors $HG = HF = |z_F - z_H| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{4} = 2$
d'où $HE = HG = HF = 2$ donc le cercle ζ' de centre H et de rayon 2 est circonscrit au triangle EFG

b) Voir figure avec (HE) et (FG) perpendiculaires en E

<u>Exercice 3 :</u>

1) a) $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2+4}}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- On a : $1 < u_0 = \frac{3}{2} < 2$ d'où la propriété est vraie pour n = 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 < u_n < 2$ et montrons que $1 < u_{n+1} < 2$
  $1 < u_n < 2 \Longrightarrow 1 < u_n^2 < 4 \Longrightarrow 3 < 3u_n^2 < 12$
  $\Longrightarrow 7 < 4 + 3u_n^2 < 16 \Longrightarrow \sqrt{7} < \sqrt{4 + 3u_n^2} < 4 \Longrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2} < \frac{\sqrt{4+3u_n^2}}{2} < 2$
  Or $1 < \frac{\sqrt{7}}{2}$ donc $1 < u_{n+1} < 2$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < u_n < 2$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{3u_n^2+4-4u_n^2}{4} = \frac{4-u_n^2}{4}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{4-u_n^2}{4} = \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{4} > 0$

- donc $u_{n+1}^2 > u_n^2$ et puis que la suite est positive alors $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$
- La suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ et majorée par 2 alors elle est convergente vers une limite ℓ avec $1 \leq \ell \leq 2$
- $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction : $x \longmapsto \frac{\sqrt{3x^2+4}}{2}$ avec f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en ℓ donc ℓ verifie l'équation $f(\ell) = \ell$ et par suite $\sqrt{3\ell^2 + 4} = 2\ell$
- d'où $3\ell^2 + 4 = 4\ell^2 \Longrightarrow \ell^2 = 4$ donc $\ell = \pm 2$
  or $1 \leq \ell \leq 2$ donc $\ell = 2$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = u_n^2 - 4$
d'où $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \frac{3u_n^2+4}{4} - 4 = \frac{3u_n^2-12}{4} = \frac{3}{4}(u_n^2 - 4) = \frac{3}{4}v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$

b) $v_0 = u_0^2 - 4 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = -\frac{7}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n^2 = 4 + v_n$ avec $u_n > 0$ donc $u_n = \sqrt{4 + v_n}$
Par suite $u_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n}(4 + v_k)$
$S_n = v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4 = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 4(n - 0 + 1)$
$S_n = -\frac{7}{4} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} + 4n + 4 = -7\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{7}{n}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0 + 4 = 4$

Exercice 4 :

1) a) $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$, $D_g =]0\,,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

b) $g(1) = 1 + 2 = 3$ or $g(x) > g(1)$ pour tout $x > 0$ donc $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$

2) a) $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$, $D_f =]0\,,+\infty[$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) f est dérivable en tout réel $x > 0$ et $f'(x) = 1 + 2\frac{x \times \frac{1}{x} - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

c)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) f est continue sur $]0, +\infty[$ et $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il admet au moins un antécédent α dans $]0\,,+\infty[$ par f

Or f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors α est unique.

e) $f(0{,}7) = -0{,}32 < 0$ et $f(0{,}8) = 0{,}24 > 0$

D'après le Théorème des valeurs intermédiaires $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$

3) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 2 \times 0 = 0$

Ainsi la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote oblique à ζ au $V(+\infty)$

b) Pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) - x = \frac{2\ln x}{x}$, le signe de (f(x) - x) est celui de $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\|$	$-$	0	$+$	
Position de ζ et Δ	$\|$	ζ est au-dessous de Δ		ζ est au-dessus de Δ	

ζ et Δ se coupent au point de coordonnées (1, 1)

4) a) $T: y = f'(e)(x - e) + f(e)$ avec $f(e) = e + \frac{2}{e}$ et $f'(e) = 1$ d'où $T: y = x + \frac{2}{e}$

T et Δ ont le même coefficient directeur qui vaut 1 donc $T // \Delta$

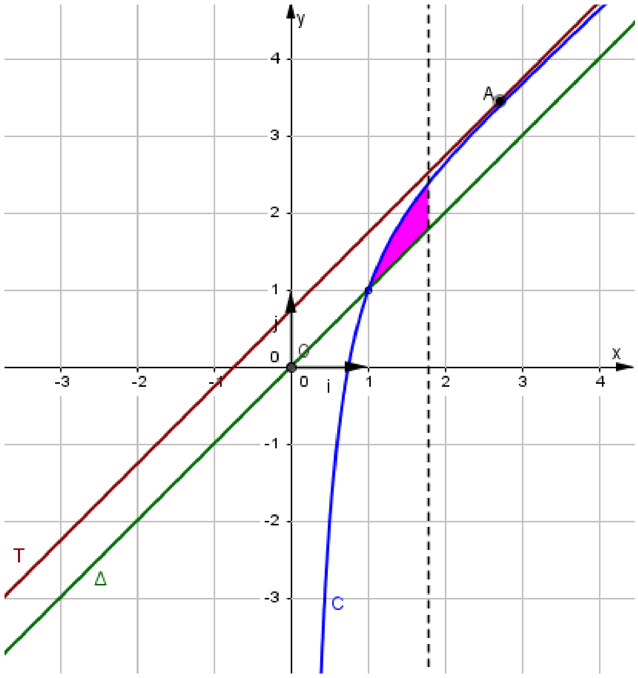
b) Pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) - \left(x + \frac{2}{e}\right) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{e} = \frac{2}{ex}(e\ln x - x)$

c) $h(x) = e\ln x - x$, $D_h =]0\,,+\infty[$

h est dérivable en tout réel $x > 0$ et $h'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e - x}{x}$, $h'(x) = 0 \Rightarrow x = e$

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

5)



6) a) Si $\lambda > 1$, $\mathrm{I}(\lambda) = \int_1^{\lambda} |f(x) - x| \, dx = \int_1^{\lambda} 2\frac{\ln x}{x} dx = [\ln^2(x)]_1^{\lambda} = \ln^2(\lambda) - 0 = \ln^2(\lambda)$

Si $\lambda \leq 1$, $\mathrm{I}(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} |f(x) - x| \, dx = \int_{\lambda}^{1} -2\frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{\lambda} 2\frac{\ln x}{x} dx = \ln^2(\lambda)$

Conclusion : Pour tout réel $\lambda > 0$ on a : $\mathrm{I}(\lambda) = \ln^2(\lambda)$

b) Pour tout réel $\lambda > 0$ on a : $\frac{1}{\lambda} > 0$ et $\ln^2\left(\frac{1}{\lambda}\right) = (-\ln \lambda)^2 = \ln^2(\lambda)$ alors $\mathrm{I}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{I}(\lambda)$

c) $\mathrm{I}(\lambda) = 2 \Leftrightarrow \ln^2(\lambda) = 2 \Leftrightarrow \ln \lambda = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda = e^{\sqrt{2}}$ ou $\lambda = e^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}}$