RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	Session de contrôle
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1,2,1)$, $B(1,0,-1)$ et $C(3,2,1)$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan passant par A, B et C.

Montrer qu'une équation de P est $y - z - 1 = 0$.

2) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

b) Soit I le milieu du segment $[BC]$. Vérifier que $I(2,1,0)$.

3) On considère dans l'espace l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2 = 0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

b) Soit (ζ) le cercle du plan P de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

Montrer que P coupe S suivant (ζ).

c) Montrer que le cercle (ζ) est circonscrit au triangle ABC.

4) On considère la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2 \\ y = -\alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que Δ est perpendiculaire à P en I.

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $M_\alpha(2,\ 1-\alpha,\ \alpha)$ un point de Δ. Montrer que $d(M_\alpha, P) = \sqrt{2}|\alpha|$.

c) Pour $\alpha \neq 0$, on note V_α le volume du tétraèdre $ABCM_\alpha$.

Montrer que $V_\alpha = \frac{4}{3}|\alpha|$.

d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $V_\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

e) Montrer que, pour les valeurs de α trouvées dans la question précédente, $M_\alpha \in S$.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Vérifier que $(2\sqrt{3}+2i)^2=8+8i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2i\sqrt{3}z-5-2i\sqrt{3}=0$.

2) On considère les points E, F et G d'affixes respectives :

$z_E=1$; $z_F=\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$ et $z_G=-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})$.

a) Vérifier que $z_G-1=i(z_F-1)$.

b) En déduire que le triangle EFG est rectangle et isocèle en E.

c) Déterminer l'affixe du point H milieu du segment $[FG]$.

d) Justifier que la droite (EH) est la médiatrice du segment $[FG]$.

3) a) Montrer que le point H appartient au cercle (ζ) de centre E et de rayon 2.

b) **Dans la figure 1 de l'annexe jointe,** on a tracé le cercle (ζ). Construire le point H.

4) Soit (ζ') le cercle de centre H et de rayon 2.

a) Montrer que (ζ') est le cercle circonscrit au triangle EFG.

b) Construire les points F et G.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3u_n^2+4}}{2}, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}^2-u_n^2=\dfrac{4-u_n^2}{4}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n^2-4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{4-\dfrac{7}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k^2$.

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=-7\times\left(1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right)+4(n+1)$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 : (6,5 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

On donne le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

a) Donner le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $g(1)$. En déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{2\ln x}{x}$, on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique notée α.

e) Vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$.

3) a) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ.

4) a) Soit T la tangente à (C) au point $A(e, f(e))$.

Donner une équation de T et vérifier que $T // \Delta$.

b) Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x) - (x + \dfrac{2}{e}) = \dfrac{2}{x}(e\ln x - x)$.

c) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e\ln x - x$.

Etudier le sens de variation de h et calculer $h(e)$.

d) Déduire que (C) est au-dessous de T.

5) **Dans la figure 2 de l'annexe jointe**, on a tracé la droite Δ et on a placé le point A.

Tracer T et (C).

6) Pour λ un réel strictement positif, on note $I(\lambda)$ l'aire du domaine D_λ du plan limité par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = (\ln\lambda)^2$.

b) Montrer que pour tout λ strictement positif, $I(\lambda) = I(\dfrac{1}{\lambda})$.

c) Pour quelles valeurs de λ l'aire du domaine D_λ est égale à 2 ?

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2022)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1 :

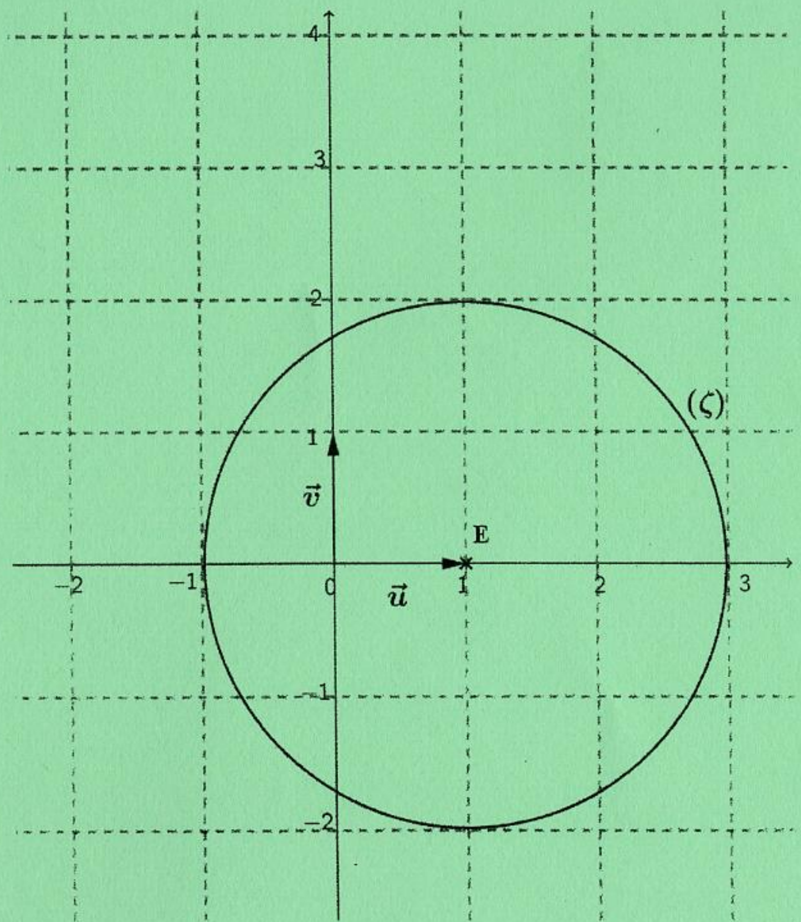

Figure 2 :