Epreuve : Mathématiques
Section : Sciences Techniques
Session principale 2022

Exercice 1 :

1) a) $A(-1,-1,-1)$, $B(-2,-1,0)$, $C(1,1,-5)$, $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}0 & 2\\1 & -4\end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix}-1 & 2\\1 & -4\end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix}0 & 2\\1 & -4\end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 2\vec{k} = -2\vec{N}$
- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$. Les points A, B et C ne sont pas alignés

b) $\vec{N} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan $P = (ABC)$ d'où $P: x + y + z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$
or $A(-1,-1,-1) \in P$ donc $-3 + d = 0 \Longrightarrow d = 3$ ainsi $P: x + y + z + 3 = 0$

c) $E(1,0,2)$ et $H(-1,-2,0)$ d'où $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}1+1\\0+2\\2-0\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\vec{N}$

$\overrightarrow{HE} = 2\vec{N}$ donc $\overrightarrow{HE}$ est un vecteur normal au plan P
De plus on a : $x_H + y_H + z_H + 3 = 0$ donc $H \in P$
Conclusion : H est le projeté orthogonal du point E sur le plan P

d) $\overrightarrow{HE} = 2\vec{N} \neq \vec{0}$ avec $H \in P$ donc EABC est un tétraèdre

$V_{EABC} = \frac{1}{3}\text{aire}(ABC)\times HE = \frac{1}{6}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|\times\|\overrightarrow{HE}\| = \frac{4}{6}\|\vec{N}\|^2 = \frac{4\times 3}{6} = 2$

2) a) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 9 = 0 \Longleftrightarrow S: x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 9 + 1 + 4$
$\Longleftrightarrow S: (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 14 = \sqrt{14}^2$

D'où S est la sphère de centre E et de rayon $R = \sqrt{14}$

b) $d = d(E,P) = EH = 2\|\vec{N}\| = 2\sqrt{3} < \sqrt{14}$ donc S et P sont sécants suivants un cercle ζ de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{14 - 12} = \sqrt{2}$

c) $AE^2 = (1+1)^2 + (0+1)^2 + (2+1)^2 = 4 + 1 + 9 = 14 = R^2$ donc $A \in S$
$BE^2 = (1+2)^2 + (0+1)^2 + (2+0)^2 = 9 + 1 + 4 = 14 = R^2$ donc $B \in S$
Conclusion : $\{A,B\} \subset P \cap S$ donc $\{A,B\} \subset \zeta$

3) a) $Q: x - 5y + z - 3 = 0$ d'où $\vec{N'}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q

$\det_x(\vec{N},\vec{N'}) = \begin{vmatrix}1 & -5\\1 & 1\end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \vec{N}$ et $\vec{N'}$ ne sont pas colinéaires

Donc P et Q sont sécants suivant une droite. Comme A et B deux points appartiennent au plan Q alors les plan P et Q sont sécantes suivant la droite (AB).

b) $x_E - 5y_E + z_E - 3 = 0$ donc $E \in Q$

c) Les points A , B et E appartiennent au plan Q et à la sphère S donc Q et S sont sécants suivant un cercle ζ' or $E \in Q$ donc E est le centre de ζ' , et le rayon de ζ' est $r' = R = \sqrt{14}$

d) On a : A et B deux points qui appartiennent à la sphère S ainsi qu'aux plans P et Q alors ils appartiennent à $S \cap P$ et à $S \cap Q$ d'où A et B appartiennent à $\zeta \cap \zeta'$ avec $\zeta \neq \zeta'$

Conclusion : Les cercles ζ et ζ' se coupent en A et B

Exercice 2 :

1) **a)** $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$

- On a : $u_0 = 2 > 1$ d'où la propriété est vraie pour n = 0.
- Soit $n > 1$. On Suppose que $u_n > 1$, montrons que $u_{n+1} > 1$
  $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n - 1}{u_n} > 0$ d'où $u_{n+1} > 1$ donc P_{n+1} est vraie

Conclusion : Pour tout n∈IN, $u_n > 1$

b) Pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n{}^2}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n}$

c) Pour tout n∈IN, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n{}^2}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$, donc (u_n) est décroissante

- La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 alors elle est convergente vers une limite $\ell \geq 1$
- $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction : $x \longmapsto \frac{2x-1}{x}$ avec f une fonction rationnelle continue sur $[1, +\infty[$ en particulier en ℓ
- ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$ et par suite $-\frac{(\ell - 1)^2}{\ell} = 0$ d'où $\ell = 1$

2) **a)** Pour tout entier naturel n on a : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b) $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1$ d'où $v_n = v_0 + n.r$ ainsi $v_n = n + 1$ pour tout entier naturel n

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ d'où $u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Longrightarrow u_n = 1 + \frac{1}{n+1} \Longrightarrow u_n = \frac{n+2}{n+1}$

3) **a)** Pour tout n∈IN*, on a : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n)$

Donc $S_1 = \ln(u_0) + \ln(u_1) = \ln(u_0 \times u_1) = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2}\right) = \ln 3$

b) Montrons que pour tout n∈IN*, on a : $S_n = \ln(n + 2)$.

- $S_0 = \ln 3 = \ln(2 + 1)$, donc la propriété est vraie n = 0.
- Soit n∈IN*. On suppose que $S_n = \ln(n + 2)$, montrons que $S_{n+1} = \ln(n + 3)$
  $S_{n+1} = S_n + \ln(u_{n+1}) = \ln(S_n \times u_{n+1}) = \ln\left((n + 2) \times \frac{n+3}{n+2}\right) = \ln(n + 3)$

Conclusion : $S_n = \ln(n + 2)$ pout tout entier naturel non nul n

c) $S_n > 10 \Leftrightarrow \ln(n + 2) > 10 \Leftrightarrow n + 2 > e^{10} \Leftrightarrow n > e^{10} - 2$ d'où $n > 22024{,}46$
Par suite $n = 22025$

Exercice 3 :

1) **a)** $z_F = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$, $z_G = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i$ et $z_I = -\frac{1}{2} + i$

$z_F - z_I = i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_G - z_I = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - i = \frac{\sqrt{3}-1+1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

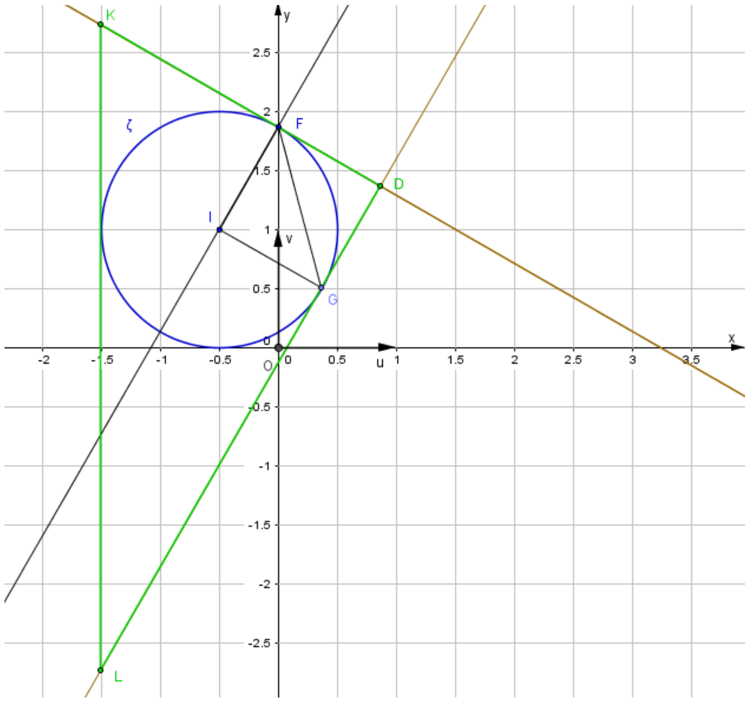
b) $IF = |z_F - z_I| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ d'où $F \in \zeta(I, 1)$

$IG = |z_G - z_I| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ d'où $G \in \zeta(I, 1)$

c) $z_F - z_I = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = i\left(-\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i(z_G - z_I)$

$\frac{z_F - z_I}{z_G - z_I} = i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{IF} \perp \overrightarrow{IG}$ d'où le triangle FGI est rectangle en I

2)



3) a) $\left((2+2\sqrt{3})i\right)^2 = -(2+2\sqrt{3})^2 = -(4+12+8\sqrt{3}) = -16-8\sqrt{3}$

D'où $(2+2\sqrt{3})i$ est une racine carrée de $-16-8\sqrt{3}$

b) $z^2 + 3z + \frac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$ ainsi $a = 1$, $b = 3$ et $c = \frac{25}{4} + 2\sqrt{3}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 25 - 8\sqrt{3} = -16 - 8\sqrt{3} = \left((2+2\sqrt{3})i\right)^2 = \delta^2$ avec $\delta = (2+2\sqrt{3})i$

D'où $z' = \frac{-b+\delta}{2a} = -\frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3})$ et $z'' = \frac{-b-\delta}{2a} = -\frac{3}{2} - i(1+\sqrt{3})$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{-\frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3})\ ,\ -\frac{3}{2} - i(1+\sqrt{3})\right\}$

4) a) $z_K = -\frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$

$$\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = \frac{-\frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3}) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = i\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = i\sqrt{3}$$

$\frac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3} \in i\mathbb{R} \Longrightarrow \overrightarrow{FK} \perp \overrightarrow{IF}$ or les points I, F et K sont non alignés alors $(KF) \perp (FI)$

b) Voir construction

c) $z_G - z_L = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + i(1+\sqrt{3}) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

$= (2+\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= (2+\sqrt{3})(z_F - z_I)$

$\frac{z_G - z_L}{z_F - z_I} = 2 + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \overrightarrow{GL}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires et non nuls, alors (GL) // (FI)

d) On a $(IF) \perp (IG)$ et $(GL) // (FI)$ d'où $(GL) = (LD)$ est la tangente à ζ en G

On a aussi $(KF) \perp (IF)$ d'où $(KF) = (KD)$ est la tangente à ζ en F

Soit J le point d'affixe $z_J = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ alors $IJ = |-1| = 1$ donc $J \in \zeta$

De plus $\frac{z_K - z_L}{z_I - z_J} = 2i(1+\sqrt{3}) \in i\mathbb{R} \Longrightarrow (KL) \perp (IJ)$ d'où (KL) est la tangente à ζ en J

Conclusion : Le cercle ζ est inscrit dans le triangle KDL

Exercice 4 :

1) **a)** $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $D_g =]0\,,+\infty[$,

$g(\ln 2) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

b) On a : g est strictement décroissante sur $]0\,,+\infty[$ sans que sa courbe présente une tangente horizontale donc $g'(x) < 0$ pour tout $x > 0$

La courbe de g est toujours au-dessus de la droite : $y = 1$ alors $g(x) > 1$ pour tout $x > 0$

2) **a)** $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $D_f =]0\,,+\infty[$

Soit $u(x) = e^x - 1$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) f est dérivable en tout réel $x > 0$ et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{e^x - 1} = g(x)$

c)

x	0	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d) $f(\ln 2) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3) **a)** Pour tout $x > 0$ on a : $\ln(g(x)) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) = \ln(e^x) - \ln(e^x - 1) = x - f(x)$

b) Pour tout $x > 0$ on a $f(x) - x = -\ln(g(x))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln(g(x)) = -\ln 1 = 0$

Ainsi la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à Γ au $V(+\infty)$

c) Pour tout $x > 0$ on a $f(x) - x = -\ln(g(x)) < 0$ car $g(x) > 1$ ainsi la courbe Γ est au-dessous de la droite Δ

4) **a)** $h(x) = f(x) - g(x)$, $D_h =]0\,,+\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) - \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b) h est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et $h'(x) = f'(x) - g'(x) = g(x) - g'(x) > 0$

D'où h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

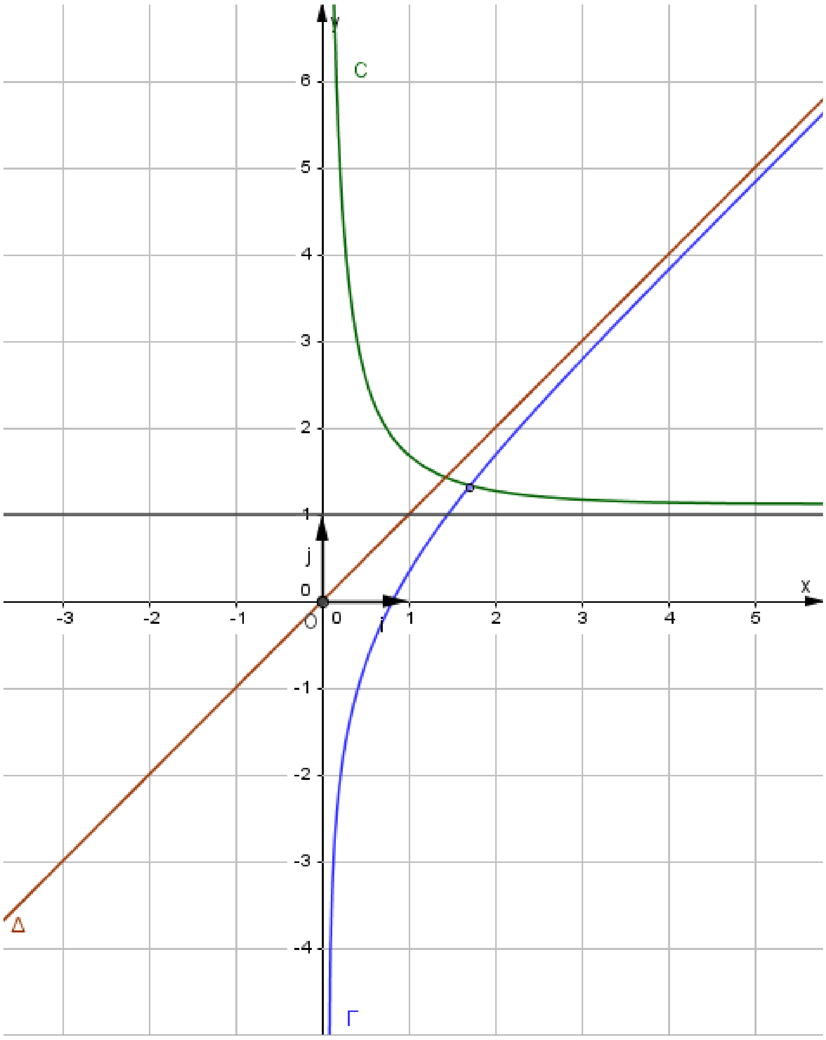
h est continue sur $]0, +\infty[$ et $h(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique $\alpha \in]0\,,+\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Conclusion : L'équation $f(x) = g(x)$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α.

5)



6) **a)** Pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{e^{2x}}{e^x-1} = \frac{e^x(e^x-1+1)}{e^x-1} = \frac{e^x(e^x-1)}{e^x-1} + \frac{e^x}{e^x-1} = e^x + \frac{e^x}{e^x-1}$

$\int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx = \int_{\ln 2}^{\alpha}\left(e^x + \frac{e^x}{e^x-1}\right)dx = [e^x + f(x)]_{\ln 2}^{\alpha} = e^{\alpha} + f(\alpha) - (2+0) = e^{\alpha} + f(\alpha) - 2$

b) $I = \int_{\ln 2}^{\alpha} e^x \ln(e^x - 1)\,dx = \int_{\ln 2}^{\alpha} e^x f(x)dx = \int_{\ln 2}^{\alpha} v'(x).f(x)dx$ soit $v(x) = e^x$

D'où $I = [v(x).f(x)]_{\ln 2}^{\alpha} - \int_{\ln 2}^{\alpha} v(x)f'(x)dx = e^{\alpha}f(\alpha) - \int_{\ln 2}^{\alpha} e^x g(x)dx = e^{\alpha}f(\alpha) - \int_{\ln 2}^{\alpha}\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$

c) On a : $f(\alpha) = g(\alpha) = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-1}$ donc $f(\alpha)(e^{\alpha}-1) = e^{\alpha}$

Alors $I = e^{\alpha}f(\alpha) - e^{\alpha} - f(\alpha) + 2 = f(\alpha)(e^{\alpha}-1) - e^{\alpha} + 2 = e^{\alpha} - e^{\alpha} + 2 = 2$