RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session de contrôle 2023
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1sur 4 à 4 sur 4.
La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5 points) :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$\text{(E)} : iz^2 + (2-\sqrt{3}-i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0 .$$

a) Vérifier que $z_1 = 2i$ est une solution de l'équation (E).

b) Trouver alors l'autre solution z_2 de l'équation (E).

c) Ecrire chacune des solutions z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 + (2-\sqrt{3})i$.

a) Placer les points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

b) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

c) Vérifier que $z_C = z_A + z_B$.

d) Déduire que $OACB$ est un losange. Placer alors le point C.

3)a) Montrer que $z_C = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$.

b) Calculer AB. En déduire l'aire $\mathscr{A}$ du losange $OACB$.

Exercice 2 (5 points) :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{3}(u_n - 1)^2 \text{ ; pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_h représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 + \dfrac{1}{3}(x-1)^2$ et la droite $\Delta : y = x$.

A / 1) Sur l'axe des abscisses, placer le point $A_0(u_0, 0)$ puis construire les points $A_1(u_1, 0)$, $A_2(u_2, 0)$ et $A_3(u_3, 0)$, en laissant apparents les traits de construction.

2) Que peut-on conjecturer sur la monotonie et sur la convergence de la suite (u_n) ?

B / 1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 4)$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{3}\right)$.

a) Montrer que (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \left(\frac{(u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1)\ldots\ldots(u_{n-1} - 1)}{3^n}\right)$.

Montrer que $\frac{1}{2^n}\ln(w_n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}\ln(w_n)$.

Exercice 3 (4 points) :

On considère une boite contenant deux boules rouges et trois boules noires indiscernables au toucher et un dé équilibré en forme d'un tétraèdre régulier dont les quatre faces sont numérotées 1,2,2,2.

On lance le dé: Le résultat d'un lancer est le numéro indiqué sur la face inférieure (sur laquelle repose le dé).

- Si on obtient 1, on tire simultanément deux boules de la boite.
- Si on obtient 2, on tire successivement et avec remise deux boules de la boite.

On note les évènements :

A : « la face sur laquelle repose le dé porte le numéro 1 ».
B : « les deux boules tirées de la boite sont de même couleur ».

1) Donner $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$.

2) a) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{2}{5}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) = \frac{13}{25}$.

b) En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}49$.

3) Les deux boules obtenues sont de couleurs différentes. Déterminer la probabilité que la face sur laquelle repose le dé porte le numéro 1. On donnera le résultat sous forme de ***fraction***.

Exercice 4 (6 points) :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $f(x) = x^2 + 1 + \ln(1-x)$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. ***L'unité graphique est 3cm.***

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que pour tout $x \in]-\infty,1[$,

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{1-x}.$$

   b) Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,1[$ sur $\mathbb{R}$.

   On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

4) a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer le nombre dérivé $(f^{-1})'(1)$.

5) Soit g la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $g(x) = f(x) + x - 1$.

   a) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty,1[$, $g'(x) = \dfrac{-x(2x-1)}{1-x}$.

   b) Dresser le tableau de variation de g.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty,1[$ exactement deux solutions dont l'une est 0 et l'autre notée α. Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

   d) Donner le signe de $g(x)$ sur $]-\infty,1[$. En déduire la position relative de C_f et T.

6) Tracer T et C_f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$.

   b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{\alpha} \ln(1-x)\,dx = -\alpha^3$.

   c) Déduire que l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par les deux droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \alpha$, C_f et T est $\mathscr{A} = \dfrac{3}{2}\alpha^2(3 - 4\alpha)\ cm^2$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session de contrôle (2023)
Annexe à rendre avec la copie